



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

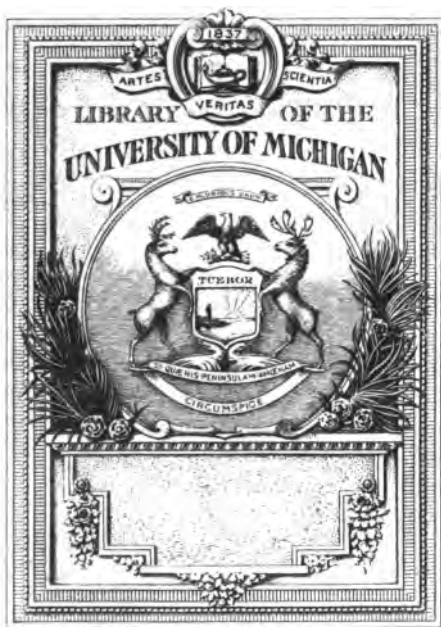
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



QA
31
E88
S731
1743

**ELEMENTA
EVCLIDIS**

ELEMENTORVM
EVCLIDIS
LIBRI XV

AD GRAECI CONTEXTVS
FIDEM RECENSITI

ET AD VSVM TIRONVM

ACCOMMODATI

Edidit G. F. Baermannus



LIPSIÆ

SVMTV IO. FRIDER. GLEDITSCHII

MDCCXXXIII.


7-18-29 N.G.S.
ILLVSTRISSIMO DOMINO
DOMINO
CHRIST. GOTTLIEB
DE HOLZENDORF

DYNASTAE IN BAERENSTEIN OBER-
ET NIEDER-LICHTENAV ETC.

REGI POLON. ET ELECT. SAX.
AB INTIMIORIBVS CONSILIIS ECCLE-
SIASTICI SENATVS PRAESIDI CVBL
CVLI REGII COMITI ETC.

ILLVSTRISIME DOMINE

*Hist. of scu.
Burgundijk
3-8-29
18679*

uum in eorum quam ma-
ximo numero, qui vel
virtutum TVARVM splendo-
re percussi TE admirantur, vel
singulari TVA humanitate &
benignitate capti TE diligunt &
venerantur, nemo sit, cui ego in
TE admirando venerandoque con-
cedam: dudum exoptavi aliquam
occasionem, quo erga TE animo

*sim affectus, publice profitendi. Equidem non ignoro, me eum non
esse, qui par sit magnis TVIS
virtutibus laudandis, vel ex cuius
iudicio ad TVAE gloriae am-
plitudinem aliquid accedere possit,
quod si posset a me fieri, nihil fo-
ret, in quo efficiendo omne meum
ingenium, studium, diligentiam
lubentius collocarem. Sed ita fe-
re natura est comparatum, ut ani-
mas magnarum virtutum admi-
ratione impletus cum alios quam
plurimos testes velit habere, tum
eum maxime, cuius admiratione
est occupatus. Quare, etsi diu
animo dubius pependi, mitteremne
ad TE, DOMINE, hoc Eu-
clideum*

*clideum opus, curis meis ad usum
tironum utcunque accommodatum,
quippe quod longe infra TVAM
dignitatem, neque TVA perso-
na satis dignum videbatur, non
potui tamen a me impetrare, ut
banc dudum exoptatam occasio-
nem dimitterem, summae admi-
rationis & venerationis, qua TE
colo, & quam TIBI verbis co-
ram satis declarare pudor meus
non sinit, publicum nunc edendi
monumentum. Confirmabat de-
inde animum meum hoc, quod be-
ne intelligebam, si quo illustri no-
mine haec mea Euclidis editio esset
inscribenda, non aliud potius,
quam TVVM, mihi deligen-*

dum esse. Namque quum TVAE
sapientiae demandata sit huius
Academiae cura, in qua per ali-
quot annos mathemata priuatim
docui: officii mei partem putabam,
TIBI vitae meae academicae red-
dere rationem, oculisque TVIS
meorum studiorum specimen ali-
quod subiicere. Quae quum ita
sint, audeo, ILLVSTRISSI-
ME DOMINE, TIBI hunc
libellum ea qua par est reuerentia
dicare, TE que maximopere ro-
go, ut eum, siue tanquam addi-
ctissimi TIBI animi mei tesseram,
siue tanquam officiorum meorum
pignus, serena fronte excipere
digneris. Tanta est TVA bu-
mani-

*manitas, & in omnes, qui TE ad-
eunt, facilitas, ut animo plane
confidam, hisce meis precibus a
TE locum relictum iri; in quo
etiam, ut spero, me adiuvabit ip-
sum nomen Euclidis, qui parens
eius scientiae recte putatur, quam
quanti TV facias, cum illud decla-
rat, quod eximia spei Filium eam in
primis erudiri voluisti, tum quod
nuper in morte Hausenii nostri,
excellētis Geometrae, magnam
iacturam factam esse iudicasti. Ce-
terum & illud TE vehementer
rogo, ut me meaque omnia TVO
favore & patrociniō complectare,
& ita de me existimes, me semper
tantam operam daturum esse, ut*

ne

*ne TVO patrocínio videar indi-
gnus, quanto animi ardore, ut
TIBI longae iucundaeque vitae
felicitas, TVIS que eximiis vir-
tutibus largiffima remuneratio
contingat, a Deo immortali ex-
peto*

ILLVSTRISSIMI TVI
NOMINIS


Scribeb. Lipsiae
xxiii Septembr.
c1b lccc xxxiiii

additus deditusque

Georg. Frider. Baermannus.



EDITORIS PRAEFATIO

 uclidis Elementa omnibus, quotquot ad mathesin discendam animum appellant, non legenda solum, sed & fere tota ediscenda esse, communis olim fuit magistrorum huius artis sententia, & hac nostra etiam aetate, in qua tanta Elementorum Geometriae copia instructi dicam an obruti sumus, omnes mecum confitebuntur, qui in Euclideanorum Elementorum lectione ea qua par est diligentia sunt versati. Neque hoc tam suscepti operis amore, quam idoneis rationibus inductus iudico, quibus exponendis & his id persuadere possem, qui haec Elementa nondum
lege-

P R A E F A T I O

legerunt, & eorum quoque criminationibus occurrere; qui, quum Euclidis hos libros siue carptim siue certe oscitanter legerint, deinceps nescio quem commodiorem in tradendis propositionibus ordinem, quam faciliorem & beuiorem in demonstrationibus viam iure desiderare posse sibi videntur. Verum quia horum argumentorum longior foret tractatio, quam praefandi breuitas patitur: vnā tantum rationem commemorasse sufficiet, ob quam horum Elementorum lectio tironibus non vtilis solum sed & necessaria est dicenda. Scilicet omnes, qui post Euclidis tempora aliquid in Geometria sublimiori, vel in Mechanica, Optica aut Astronomia a se inuentum litteris prodiderunt, quemadmodum demonstrationum suarum plurimas ex iis duxerunt, quae in his Elementis ab Euclide sunt ostensa, ita & saepe ad eorum tanquam fontes lectores amandarunt. Cuius rei quae sint rationes, intel-

P R A E F A T I O

intellectu non est difficile. Namque veteres Geometrae alium Auctorem citare non poterant: quum multis post Euclidem seculis nemo fuisset, qui tanta arte detextam Euclidis telam retexere, & sub noua quadam forma tironum oculis sistere voluisset. Ii vero, qui nostrae aetati propiores fuerunt, his tantum exceptis, qui ipsi vniuersae matheseos elementa conscripserunt, ad alium elementorum Geometriae scriptorem lectores suos commode non potuerunt ablegare, cum alias ob causas, tum ob hanc potissimum, quod nullius Auctoris elementa Geometriae aequae vulgata sunt, atque haec Euclidea, quae in omnes terrarum regiones, simul ac ad eas Geometria accessit, perlata esse constat, & ex quibus tanquam fontibus ceteri riuulos suos deduxerunt. Quae causa, sicut plerosque recentiorum Mathematicorum impulisse videtur, vt Euclidea Elementa, vbi opus erat, in demonstrationibus

P R A E F A T I O

tionibus suis citarent, ita & eos, opinor, qui posthac scribent, commouebit, certe commouere debet, ut hunc veterum morem sequantur. Quum ergo ad tot tam admirabilia excellentissimorum ingeniorum inuenta aditus iis sit praeclusus, qui Euclidis Elementis sunt destituti, vel eorum lectionem negligunt: neminem fore confido, qui non intelligat, quam sit necessarium matheseos amatoribus, ut in Euclideae schola tirocinium ponant.

Quae quum ita sint, communi utilitati me aliquo modo consulere posse putabam, si hosce Euclideos libros, quorum exemplaria in nostris bibliopoliis inde ab aliquot annis desiderabantur, denuo edendos curarem. Ut autem haec noua editio quam plurimorum vñsibus inferuire posset: operam mihi dandam esse intelligebam, ut talia exemplaria ederentur, quae neque mole sua neque pretio emtores deter-

P R A E F A T I O

deterrent. Quare quum ea horum Elementorum editio, quam eximius, dum viueret, Geometra, Isaacus Barrowius, iuuenis olim Cantabrigiae parauerat, breuitate ita se commendasset, vt & in Germania typis quondam recusa, & plurimorum manibus huc vsque trita esset: in animum inducebam, huius editionis aliquod exemplar typis iterum describendum dare. Sed postea mutavi consilium, quum perpenderem, huic quamuis elegantissimae editioni inesse tamen aliquid, quod aliquos lectores offendere meminerim, & quod editioni aliqua saltem ex parte meliori locum relinquat. Scilicet qui Barrowianam Euclidis editionem cum Graecis codicibus contulerunt, non ignorant, in ea multarum propositionum demonstrationes immutatas, nonnullarum quoque omnino sublatas esse, aliis, quas Graecus Euclides non habet, in earum locum substitutis. Quod quanquam apud
b mul-

P R A E F A T I O

multos Lectores facile excusatur breuitatis studio: sunt tamen harum rerum intelligentes, qui id factum non esse mallent. Dicunt enim primo, difficillimum esse, Euclideis demonstrationibus alias substituere, quae, quum breuiores sint, genio horum Elementorum, & purae simplicitati huius Geometriae aequae conueniant; idque ipsum illum celeberrimum Euclidis editorem suo exemplo docuisse in demonstrationibus, quas plurimis Libri II. propositionibus adiunxit. Deinde negant, illum, qui se Euclidem edere profiteatur, munere suo rite fungi, si lectoribus alia tradat, quam quae ipsi legerent, si Graecis codicibus vterentur. Quae, quum non exiguam veri speciem habere mihi viderentur; neque ego in tanti viri opere aliquid immutare auderem: statui, de noua prorsus editione Latina Euclidis paranda mihi cogitandum esse, quae Graeci textus demonstrationes satis fideliter exhi-

P R A E F A T I O

exhiberet, in ceteris vero Barrowianam breuitatem, quantum eius fieri posset, imitaretur.

Sumta itaque in manus praestantissima Operum Euclidis editione, quae cura doctissimi viri, Dauidis Gregorii, Oxoniae prodiit, ex ea textum Latinum definitionum & propositionum descripsi ad verbum, paucissimis * exceptis, in quibus siue sensus siue Graecus contextus aliquam mutationem postulabat. Deinde perfecta vniuscuiusque propositionis demonstratione, eam sic reddere studui, vt, seruatō eodem ordine, quo Euclides syllogismorum seriem instruxerat, totam tamen demonstrationem in arctius quasi spatium cogerem. Hoc autem quatuor potissimum modis efficere volui, quibus & Isaacum Barrowium usum esse videbam. Nam primo ^{ἐκ θεοῦ} *ἐκ θεοῦ*, quam

b 2 Eucli-

* Sunt illae prop. 7. L. I. prop. 28. L. VI. prop. 10. L. VIII. & prop. 26. L. XI.

P R A E F A T I O

Euclides singulis propositionibus subiungit, & in qua quidquid in propositionibus vniuersaliter enunciatum fuit ad singulares schematum appositorum lineas applicat, ipsis propositionibus inclusi, ita tamen, vt ne *ἐκθεσις* cum propositione commisceretur, sed vt quaeque propositio absolutum sensum haberet, etiam si inter legendum litterae illae maiusculae, quae ad schema referuntur, & *ἐκθεσις* continent, omitterentur. Quod ita fieri in propositionibus mathematicis, saltem si tironibus scribatur, consultum esse existimo, propterea quod propositiones ipsae memoriae mandandae sunt, non autem earum *ἐκθεσις*, quippe quae solis demonstrationibus inserviunt. Secundo, syllogismorum maiores, quas vocant, propositiones, quae in omni demonstratione ex superioribus sumuntur, & quas Euclides solet totidem verbis plerumque repetere, omisi, indicaui tamen per numeros, alphabeti

P R A E F A T I O

beti Graeci litteris in margine adscriptos, ea loca, in quibus eas, si sponte non succurrant, lector euoluere potest. * Tertio pro quibusdam verbis notas illas adhibui, quae apud Mathematicos dudum visu receptae sunt. Habent autem harum notarum pleraeque non hunc solum usum, ut tanquam scripturae compendia textum breuiorem reddant, sed & si quis iis semel adsueuerit, quod fieri potest facillime, menti in cogitando non exiguo sunt adiumento, quia quantitatum, de quibus cogitandum est, mutuam relationem citius longe & distinctius, quam litterae vel vocabula, animo intuentiam praebent. Propterea veniam mihi, ut spero, dabunt aequi lectores, quod in X. Libro horum Elementorum

b 3

rum

* Videlicet horum numerorum posterior designat Librum, prior huius libri propositionem. Praeterea def. significat definitionem, ax. axioma, & post. postulatam.

P R A E F A T I O

rum quatuor nouis notis vsus fui, quum eae, quae in Barrowiana editione ibi occurrunt, nimis incommodae sint: Est enim earum vna alteri adeo similis, vt inter legendum facillime possint confundi. Quare quum his, sine lectorum incommodo, me vti vix posse intelligerem, neque apud alium Auctorem alias ipsis pares reperissem: ausus sum nouas istas effingere, quas in limine dicti Libri exposui. Perpaucae quum sint, facile poterit lector earum potestatem memoria retinere, praesertim vbi animaduernerit, eas ex initiis litteris Graecorum, quibus substituantur, vocabulorum *Σύμμετρα*, *ἀσύμμετρα*, *ἄλογα*, leuiter inflexis litterarum ductibus, vel lineola apposita, esse efformatas. Quartum denique, quod mihi in contrahendis Euclideis demonstrationibus nonnunquam auxilio fuit, hoc est, quod quibusdam propositionibus subiunxi scholia vel corollaria, in quibus eiusmodi propositiones

P R A E F A T I O

fitiones ostensae sunt, quae multorum sequentium theorematum & problematum demonstrationes iterum tanquam principia ingrediuntur.

Sed praeter haec scholia & corollaria, visum etiam est alia addere, in quibus ex Euclidis propositionibus aliae, quarum vel ad inuentionem, vel ad aliorum Auctorum demonstrationes intelligendas, frequentissimus vsus est, & quae in vulgatis aliorum Auctorum Elementis Geometriae habentur, sine longa ratiocinatione colliguntur. Praeque horum scholiorum e Barrowiana editione huc transcripsi, nonnulla, sed perpauca, ipse addidi. Nam omnium horum scholiorum numerum mediocrem esse volui, memor quippe, non thesaurum geometricarum propositionum mihi condendum, sed Elementa Geometriae edenda fuisse. Singula autem haec siue scholia, siue corollaria, siue alia, quae in Graecis

P R A E F A T I O

exemplaribus horum Elementorum vel omnino non leguntur, vel saltem aliis in locis, demonstrationum contextui interpersa, reperiuntur, asteriscis notavi. Erunt forsitan, qui mirabuntur, cur talibus propositionibus scholiorum titulum adscripserim, quibus corollariorum potius nomen convenire existimabunt. His autem respondeo, me in his quoque minutiis ad indolem Euclidei operis, quantum possem, accedere voluisse, in quo video, eas fere solas propositiones corollariorum vel *παρισυμάτων* titulo insignitas esse, quae, quum in demonstratione alicuius theorematis vel problematis obiter ostensae sint, dein ex ea quasi excerpuntur, & absoluta demonstratione, separatim enunciantur, quo earum ad sequentes demonstrationes expeditior sit usus. Quod tandem ad schemata attinet, ligno incisa, etsi curavi, ut ea illis, quae Oxoniensis Operum Euclidis editio habet, similia essent, fateor

P R A E F A T I O

fateor tamen, nos illarum non assequi potuisse elegantiam.

Haec sunt, quae de instituti operis ratione lectores monere volui, & ex quibus satis, opinor, apparebit, me omne consilium operamque in hoc intendisse, ut & verum & integrum Euclidem ipsis in manus traderem. Ut autem hi, qui ad eius lectionem primum accedunt, aliquam eius notitiam afferant, non erit alienum, huius Geometriae ideam breuiter adumbrare. Totum hoc opus duabus constat partibus, quarum altera contemplationem superficierum, altera solidorum complectitur. Et in quatuor quidem primis libris traduntur, quae figuris planis, circulo puta & rectilineis, absolute spectatis conveniunt, & quae ad earum aequalitatem ac angulorum laterumque in illis magnitudinem cognoscendam conducunt. Sextus liber de similitudine figurarum planarum agit, e-

rum-

P R A E F A T I O

rumque, item angulorum & rectorum linearum, ad se inuicem rationes inuestigare docet. Eius gratia in quinto libro tradita est proportionum, quae inter magnitudines esse possunt, vniuersalis θεωρία. Hisce prima pars huius Geometriae absoluitur. Solidorum contemplatio commensurabilium & incommensurabilium notitiam requirit, ad quam doctrina de numeris opus est. Eorum itaque librorum qui sextum sequuntur, tres priores de numeris copiose exponunt, ac ob id arithmetici vocari solent. Decimus rectorum linearum & spatiorum irrationalium, hoc est, datis rectoris lineis vel spatiis incommensurabilium, doctrinam tradit. Postremi quinque in solidorum contemplatione versantur, & ea docent, quae ad illorum tam dimensionem, quam proportionem & in se inuicem inscriptionem spectant. Nunc reliquum esset, vt singulorum etiam librorum argumenta commemorarem.

Sed

P R A E F A T I O

Sed praeterquam quod hac enarratione facile carere poterunt, quibus animus est, integra haec Elementa a capite vsque ad calcem perspicere (quod vt tirones faciant, maximopere sua-
deo): vereor, ne, si ea percurram, haec praefatio, quae iam praeter opinionem longiuscula facta est, iustos limites excedat. Vnum hoc addam, si hanc meam operam doctis viris probari intellexero, curaturum me esse, vt Euclidis Liber Datorum, Theodosii sphaerici, & Archimedis Geometrici libri eodem, quo haec Elementa, habitu vestiti posthac in lucem prodeant.



Horse

*Hosce errores operarum, quos repetita lectione
deprehendimus, Lector ut calamo sic
corrigan, rogamus.*

Pag. 6. lin. 17. *vni*, scribatur *vno*.

pag. 11. *Mn*. vltima post *habentes* sequi debent haec
verba, *cum rectis AC, BC initio ductis*.

pag. 19. in schemate prop. 19. alteri extremo basis
trianguli adscribatur littera *B*.

pag. 63. lin. antepenultima, *connexam*, scribatur
connexam.

pag. 65. lin. 19. *LH*, scribatur *KH*.

pag. 68. lin. 6. *AKC*, scribatur *ABC*.

pag. 121. lin. 22. *eorum*, scribatur *earum*.

pag. 160. lin. 24. *XXXI*, scribatur *XXXII*.

pag. 160. lin. 4. *AB*, scribatur *ABq*.

pag. 264 in margine suppleatur *ε*.

pag. 307. lin. 29. *Apotomae*, scribatur *Apotome*.

pag. 320. lin. 26. *AC*, scribatur *AB*.

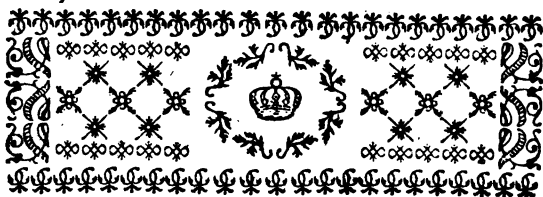
pag. 334. lin. 14. *punctam*, scribatur *punctum*.

pag. 348. lin. 27. *Sint*, scribatur *Si sint*.

pag. 367. lin. 22. deleatur; .

pag. 402. lin. 22. *eorum*, scribatur *4 in iis angulo-
rum*.

ELEMEN-



ELEMENTORVM EVCLIDIS

LIBER I.

DEFINITIONES.

1. *Punctum* est, cuius pars nulla est.
2. *Linea* autem est longitudo non lata.

A ————— B 3. *Lineae* vero *extrema*
C ————— D (A, B, vel D, C) sunt
puncta.

4. *Recta* quidem *linea*
AB est, quae ex aequo sua interiacet puncta.

5. *Superficies* autem est, quod longitudi-
nem & latitudinem tantum habet.

6. *Superficie* vero *extrema* sunt lineae.

7. *Plana* quidem *superficies* est, quae ex
aequo suas lineas rectas interiacet.

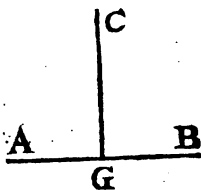
8. *Planus* vero *angulus* est
duarum linearum, in plano
se se tangentium, & non in
directum iacentium, mutua
inclinatio.

9. Quando autem lineae DE, DF, angulum
comprehendentes, rectae fuerint, *angulus* ipse
EDF appellatur *rectilineus*.

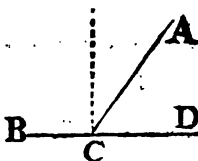
A

10. Quum

EVCLIDIŒ ELEMENT.



10. Quum vero recta linea CG, super rectam lineam AB infistens, angulos deinceps AGC, BGC inter se aequales fecerit: *rectus* est vterque aequalium angulorum; & quae infistit recta linea CG *perpendicularis* vocatur ad eam AB, super quam infistit.

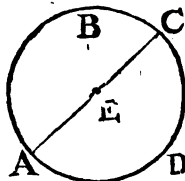


11. *Obtusus* angulus ACB est, qui maior est recto.

12. *Acutus* autem ACD, qui est recto minor.

13. *Terminus* est, quod aliquis est extremum.

14. *Figura* est, quae aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur.



15. *Circulus* est figura plana, una linea ABCDA comprehensa, quae *circumferentia* appellatur, ad quam ab vno puncto E eorum, quae intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectae lineae, EC, EA, inter se sunt aequales.

16. Hoc autem punctum E *centrum circuli* nuncupatur.

17. *Diameter vero circuli* est recta quaedam linea AC, per centrum E ducta, & ex vtraque parte circuli circumferentia ABCDA terminata. Quae etiam circulum bifariam secat.

18. *Semicirculus* est figura ACBA comprehensa sub diametro AC, & ea circuli circumferentia ABC, quae a diametro intercipitur.

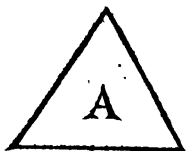
19. *Recti-*

19. *Reſſilineae figurae* ſunt, quae rectis lineis comprehenduntur.

20. *Trilaterae* quidem, quae tribus.

21. *Quadrilaterae*, quae quatuor.

22. *Multilaterae* vero, quae pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.



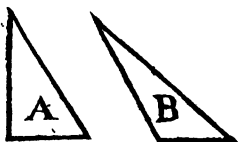
23. E trilateris autem figuris, *aequilaterum triangulum* A eſt, quod tria latera habet aequalia.



24. *Iſoſceles* autem B, quod duo tantum aequalia habet latera.



25. *Scalenum* C vero, quod tria latera habet inaequalia.

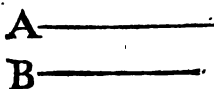
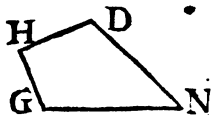
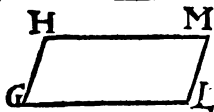
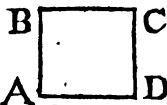


26. Adhaec, e trilateris figuris, *rectangulum* quidem *triangulum* eſt A, quod rectum angulum habet.



27. *Amblygonium* autem B, quod habet angulum obtuſum.

28. *Oxygonium* C vero, quod tres habet angulos acutos.



29. E figuris autem quadrilateris, *quadratum* quidem est ABCD, quod & aequilaterum est, & rectangulum.

30. *Oblongum* E, quod rectangulum quidem est, sed non aequilaterum.

31. *Rhombus* A, quod aequilaterum quidem est, sed non rectangulum.

32. *Rhomboides* GHML, quod habet opposita & latera & angulos inuicem aequalia, sed nec aequilaterum est, nec rectangulum.

33. Reliqua autem quadrilatera, praeter haec, vocentur *trapezia*. Vt GNDH.

34. *Parallelae* rectae lineae A, B sunt, quae in eodem iacentes plano, atque ex

utraque parte in infinitum productae, in neutram sibi coincidunt.

POSTVLATA.

1. Postulatur, a quouis puncto ad quoduis punctum rectam lineam ducere.

2. Item, rectam lineam finitam continue in directum producere.

3. Item, quouis centro & interuallo circulum describere.

COM-

COMMUNES NOTIONES,
sive AXIOMATA.

1. Quae eidem aequalia, inter se sunt aequalia.
2. Si aequalibus aequalia addantur, tota sunt aequalia.
3. Si ab aequalibus aequalia auferantur, reliqua sunt aequalia.
4. Si inaequalibus aequalia addantur, tota sunt inaequalia.
5. Si ab inaequalibus aequalia (*vel ab aequalibus inaequalia*) auferantur, reliqua sunt inaequalia. * Et id quidem, quod ex maiori inaequalium, demtis aequalibus, relinquitur, maius est; quod vero, demto maiori inaequalium ab aequalibus, relinquitur, minus est.
6. Quae eiusdem (*vel aequalium*) sunt duplicia, inter se sunt aequalia. * Idem de utrumque aequae multiplicibus intelligendum est.
7. Quae eiusdem (*vel aequalium*) sunt dimidia, inter se aequalia sunt. * Idem de utrumque aequae submultiplicibus intellige.
8. Quae sibi mutuo congruunt, sunt aequalia.

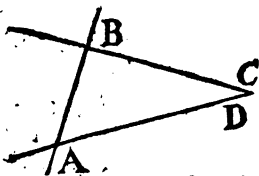
* Hoc axioma in rectis lineis & angulis valet: conuersum: sed non congruunt aequales figurae, nisi & similes fuerint. Ceterum *congruere* dicuntur, quorum partes applicari partibus sic possunt, ut tota eundem locum occupent.

9. Totum sua parte maius est.

A 3

10. Omnes

10. Omnes anguli recti inter se aequales sunt.



11. Si in duas rectas lineas AD, BC recta BA incidens angulos interiores BAD, ABC, & ad easdem partes, duobus rectis minores fecerit: duae illae rectae AD, BC, in infinitum productae, coincident inter se ex ea parte, ad quam sunt anguli duobus, rectis minores.

12. Duae rectae lineae spatium non comprehendunt.

13. * Omne totum aequale est omnibus suis partibus simul sumtis.

14. * Quod vni aequalium maius vel minus est, idem & altero maius vel minus est. Et quo vnum aequalium maius est vel minus, eodem alterum quoque maius vel minus est.

In hoc libro notae, quibus breuitatis causa utimur, hae fere sunt.

\equiv Notat aequalitatem. E. g. Ang. $A \equiv B \equiv C$, lege, angulus A aequalis est angulo B, & hic angulo C. Sed saepe trium quantitatum hac nota iunctarum primam etiam tertiae aequalem intelligendam esse per ax. I. supponitur.

$>$ notat maioritatem. E. g. Recta $AB > CD$, lege, recta AC maior est quam recta CD.

$<$

$<$ notat minoritatem. $A < B$, lege A minor est quam B .

$+$ notat duas magnitudines pluresue, inter quas haec nota reperitur, iunctim sumendas esse. E. gr. $A + B$, lege, A una cum B .

$-$ notat subtractionem. E. gr. Rectus $-$ ang. ABC , lege, Excessus recti anguli super angulum ABC , vel, ut vulgo pronunciant, rectus minus angulo ABC .

Δ notat triangulum.

AC^q notat quadratum a recta AC descriptum, vel cuius latus est recta AC .



PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Centro A, interuallo A
B describatur * circulus
BCD; & rurfus centro B
interuallo BA circulus
ACE; & a puncto C, in
quo circuli feſe mutuo

β. 1. post.

secant, ad puncta A, B ducantur^β rectae CA, CB.

γ. 15. def.

Quoniam igitur $\gamma. AC = AB$, & $BC = BA$:

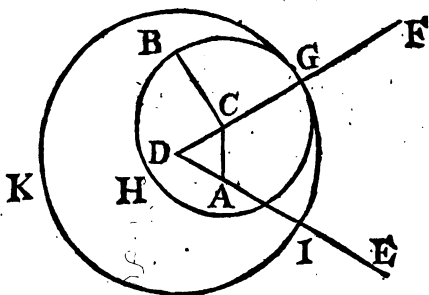
Д. 1. ах.

erit δ $AC \equiv BC$. Quare tres rectae AC , AB ,
 BC aequales sunt. Est igitur ACB triangu-

2. 23. def.

lum aequilaterum ' super AB constitutum.
Quod Erat Faciendum.

PROP. II. PROBL.



Ad datum punctum A datae rectae BC aequalem rectam ponere.

2. i. post.

Ducatur ⁷ recta AC; et super eam constitua-
tur ⁸ triangulum aequilaterum ADC; & pro-
ducantur ⁹ DA, DC ad E & F. Dein centro C
intervallo CB describatur ¹ circulus GBH, &
rursus centro D, intervallo DG, circulus GIK.

4. 1. 1.

9. 2. post.

1

4. 3. post.

Quo-

,

κ. 15. def.
 λ. 23. def.
 μ. 3. ax.
 ν. 1. ax.



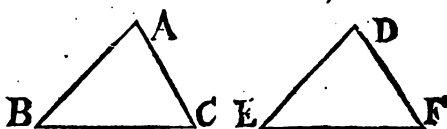
Ponatur ξ ad punctum B §. 2. 1.

o. 3. post.
π. 15. def.
g. construct.
σ. 1. ax.

•

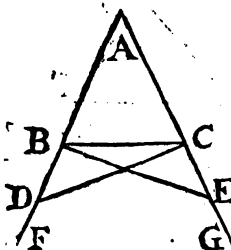


Nam si triangulum ABC applicetur trian-
gulo EDF, posito puncto A super D, & recta
AB



τ . hypoth. AB super DE : quia $AB = DE$, cadet^u punctum B in E . Congruente autem recta AB , rectae DE : quia^u ang. $A = D$, cadet^u recta AC in DF ; & ^u quia $AC = DF$, punctum C cadet^u in F . Iam si BC ipsi EF non congruat: necesse est duae rectae comprehendant spatium; quod fieri nequit^o. Ergo basis BC congruet basi EF , & ergo^u $BC = EF$. Quare & tota trian- gula ABC , DEF congruent, & aequalia erunt; itemque anguli B ac E , nec non anguli C ac F congruent, & aequales erunt. Quod Erat Demonstrandum.

PROP. V. THEOR.



Triangulorum isoscelium
 ABC anguli ad basin ABC ,
 ACB , sunt inter se aequa-
 les; & productis aequali-
 bus rectis AB , AC , anguli
 sub basi FBC , GCB erunt
 inter se aequales.

α . 3. I.

Sumto enim in recta BF
 puncto quolibet D , fiat α
 $AE = AD$, & ducantur rectae CD , BE .

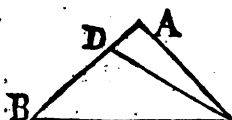
ψ . constr.
 ω . hyp.
 α . 4. I.

Quoniam ergo in triangulis ABE & ACD
 est ψ $AE = AD$, & ω $AB = AC$, & angulus A
 communis: erit α ang. $ABE =$ ang. ACD , &
 ang. $BEC =$ ang. BDC , & $BE = CD$. Quum
 autem

autem $\angle A E = A D$, & $\angle A C = A B$, ideoque β p. 3. ax.
 $C E = B D$: erit in triangulis $B E C$ & $B D C$
 $\text{ang. } C B E = \text{ang. } B C D$, & $\text{ang. } B C E = \text{ang. } D B C$. Sederat γ $\text{ang. } A B E = \text{ang. } A C D$. Ergo γ . per dem.
 β anguli ad basin $A B C$, $A C B$ aequales sunt, item
anguli sub basi $G C B$, $F B C$ aequales sunt. Q.
E. D.

* *Scholium.* Hinc omne triangulum aequilaterum est quoque aequiangulum.

PROP. VI. THEOR.



Si trianguli ABC duo anguli ABC, ACB sint inter se aequales: latera AB, AC, aequalibus angulis subtensa, inter se aequalia erunt.

Si enim non est $A B = A C$, vtravis $A B > A C$ erit. Fiat ergo δ $B D = A C$, & ducatur $C D$. β 3. 1.

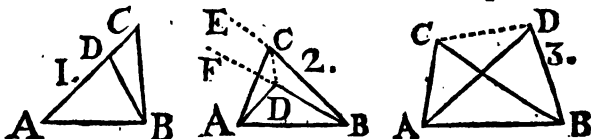
In triangulis ergo $D B C$, $A B C$ est $B D = A C$, & $B C$ latus commune, & γ $\text{ang. } D B C = \text{ang. } A C B$. Quare δ triangulum $D B C =$ triangulo $A B C$, pars toti. Quod Est Absurdum γ . Non δ 4. 1. est ergo recta $A B$ rectae $A C$ inaequalis; ergo γ 9. ax. aequales sunt. Q. E. D.

* *Scholium.* Hinc omne triangulum aequiangulum est quoque aequilaterum.

PROP. VII. THEOR.

*Super eandem rectam AB duabus iisdem rectis AC, BC duae aliae rectae AD, BD aequales altera alteri, eosdem terminos habentes, ($A D = A C$,
 $B D = B C$)*

AC, & BD = BC) non constituentur ad aliud punctum D atque aliud C in easdem partes.



* 1. *Casus*. Si punctum D statuatur in AC: liquet⁹ non esse $AD = AC$.

* 2. *Casus*. Si punctum D ponatur intra triangulum ACB: ducatur CD, & producantur BD ad F, & BC ad E. Iam si fit $AD = AC$: erit⁹ ang. $ADC = ACD$. Sed si $BD = BC$: erit⁹ ang. $ECD = FDC$. Ergo ang. $ACD > FDC$, & multo magis ang. $ECD > FDC$. Q. E. A.

* 3. *Casus*. Si D fit extra $\triangle ACB$: ducatur recta CD. Iam si fit $AD = AC$: erit⁹ ang. $ACD = ADC$. Quare ang. $ADC > DCB$, & multo magis ang. $BDC > DCB$. Sed quia etiam ponitur $BD = BC$: erit⁹ ang. $BDC = DCB$. Q. E. A.

Ergo non potest esse $AD = AC$, & simul $BD = BC$. Q. E. D.

PROP. VIII. THEOR.

Si duo triangula ABC, DEF habeant duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DF aequalia, alterum alteri, habeant etiam basin BC basi EF aequalem, angulum quoque A angulo D aequalem habebunt, ab aequalibus rectis comprehensum.

Si

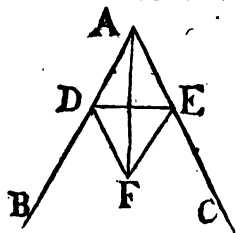
Si enim $\triangle ABC$ applicetur $\triangle DEF$, & punctum B ponatur in E, & recta BC super rectam EF: cadet \wedge punctum C in F, quia μ BC \wedge 8. ax. μ hyp. \equiv EF. Iam si punctum A non caderet in D, sed in aliud, velut G: super eadem recta EF duabus iisdem rectis ED, FD aliae duae rectae EG, FG, aequales μ , altera alteri, habentes eosdem terminos, constitutae essent ad aliud punctum G & aliud D in easdem partes. Sed hoc fieri nequit. Ergo punctum A cadet in punctum D, ν 7. i. & ergo congruet latus BA lateri ED, & latus AC lateri DF; quare & angulus A congruet angulo D. Ergo \wedge ang. A \equiv D. Q. E. D.

* *Schol. 1.* Hinc triacula sibi mutuo aequilatera etiam sibi mutuo aequiangula sunt ξ . ξ 4. 1.

* *Schol. 2.* Triacula sibi mutuo aequilatera aequantur inter se ξ .

PROP. IX. PROBL.

Datum angulum rectilineum BAC bifariam secare.



Sumatur in recta AB punctum quoduis D, & capiat \circ AE \equiv AD, & \circ 3. i. ducatur DE, super qua

fiat triangulum aequilaterum DFE. Ducatur AF. Dico AF bifariam secare ang. BAC.

Quoniam enim est AE \equiv AD, & AF latus commune, & basis EF \equiv π basi DF: est ϵ ang. π constr. $\&$ 23. def. ϵ 8. 1. \equiv DAF. Ergo AF bifariam secat angulum BAC. Q. E. F.

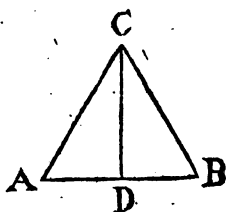
* *Schol.*

* *Scholium.* Hinc patet, quomodo angulus secari possit in aequales partes 4, 8, 16, 32 &c; singulas nimirum partes iterum bisecando. Methodus vero recta & circulo angulos secandi in partes aequales quotcunque, e. gr. 3, 5, 7, nulla datur.

PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam AB bisariam secare.

ε. 1. I.
τ. 9. I.



Fiat super AB^o Δ aequilaterum, & bisecetur^r ang. ACB recta CD. Dico, rectam AB bisecari in puncto D.

υ. 23. def.

Nam^o AC = BC, & CD latus Δis ADC & BDC

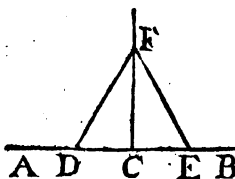
φ. constr.
κ. 4. I.

commune, & ang. ACD = BCD φ. Ergo κ AD = DB. Q. E. F.

PROP. XI. PROBL.

Data rectae lineae AB, a puncto in ipsa dato C, ad rectos angulos rectam lineam ducere.

ψ. 3. I.
ω. 1. I.



Sumatur in recta AC punctum quoduis D, & ponatur^ψ CE = CD, & constituatur^ω super DE Δ aequilaterum DFE, & ducatur recta FC, quae erit rectae AB ad angulos rectos.

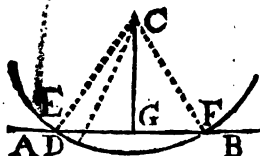
α. constr.
β. 23. def.
γ. 8. I.
δ. 10. def.

Quoniam enim in Δis FEC & FDC^α est CE = CD, &^β EF = DF, & FC communis: ang.^γ ECF = DCF. Ergo^δ anguli ECF, DCF recti sunt. Q. E. F.

PROP.

PROP. XII. PROBL.

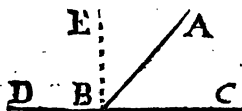
Super datam rectam lineam infinitam AB, a dato puncto C, quod non est in eadem, perpendicularem lineam rectam ducere.



Sumatur ex altera parte rectae AB punctum quodvis D, & centro C intervallo CD describatur ^{7. 3. post.} circulus EDF, & ^{9. 10. 1.} secetur ² recta EF bifariam in G. Ducatur recta CG, quae in AB erit perpendicularis.

Nam ductis rectis CE, CF, quoniam ^{7. 15. def.} $CE = CF$, & CG communis, & ^{8. 1.} $\angle ECG = \angle FCG$: erit ^{7. 15. def.} $\angle EGC = \angle FGC$. Ergo CG est in AB perpendicularis ^{8. 1.}. Q. E. F. ^{10. 10. def.}

PROP. XIII. THEOR.



Si recta AB inficiens rectae DC, faciat angulos ABD, ABC: vel ^{10. 10. def.} duos rectos faciet, vel ^{11. 1.} duobus rectis aequales.

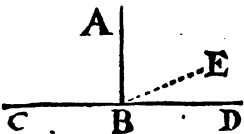
Si enim $\angle ABD = \angle ABC$: duo ^{10. 10. def.} hi anguli ^{11. 1.} recti sunt. Sin minus: ducatur ^{11. 1.} a puncto B ^{11. 1.} recta BE in DC perpendicularis. Quare $\angle CBE + \angle EBD = 2$ rectis. Et quoniam $\angle CBE = \angle CBA + \angle ABE$: erit ^{11. 1.} $\angle CBE + \angle EBD = \angle CBA + \angle ABE + \angle EBD$. Item quoniam $\angle DBA = \angle ABE + \angle EBD$: erit ^{11. 1.} $\angle DBA + \angle CBA = \angle CBA + \angle ABE + \angle EBD$. Ergo ^{11. 1.} $\angle DBA + \angle CBA = \angle CBE + \angle EBD = 2$ rectis. Q. E. D. ^{13. 13. ax.}

• 1. Schol.

* 1. *Schol.* Hinc si vnus angulorum EBD rectus sit: alter EBC etiam rectus erit. Si ille ABD obtusus: hic ABC acutus erit; & contra.

* 2. *Schol.* Si plures rectae quam vna ad idem punctum eidem rectae insistant: anguli fient duobus rectis aequales.

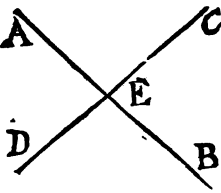
PROP. XIV, THEOR.

 Si ad aliquam rectam AB, & ad punctum in ea B, duae rectae BC, BD, non ad easdem partes positaе, faciant angulos deinceps CBA, DBA, duobus rectis aequales: ipsae rectae BC, BD in directum sibi inuicem erunt.

Si enim BD non sit in directum ipsi CB: fit π ei in directum quaeuis BE. Ergo \angle ang. CBA + ABE = 2 rectis. Sed & CBA + DBA = 2 rectis. Ergo CBA + ABE = CBA + DBA. Ergo \angle ang. ABE = DBA. "Q.E.A.

π . 1. post.
 ϕ . 13. I.
 σ . hyp.
 τ . 3. ax.
 ν . 9. ax.

PROP. XV. THEOR.

 Si duae rectae AB, CD sese mutuo secant in E: angulos AEC, DEB ad verticem facient inter se aequales.

ϕ . 13. I.

χ . 3. ax.

Nam ϕ ang. AEC + AED = 2 rectis = DEB + AED. Ergo \angle ang. AEC = DEB. Q. E. D.

* 1. *Schol.* Hinc manifestum est, quotcunque rectis sese mutuo secantibus, angulos ad punctum sectionis aequales esse 4 rectis.

2. *Schol.*

* 2. *Schol.* Et ergo omnes anguli circa vnum punctum constituti efficiunt quatuor rectos.

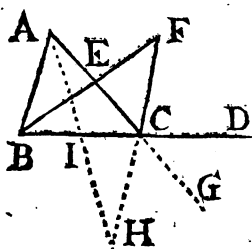
* 3. *Schol.* Si ad aliquam rectam lineam AB, atque ad eius punctum E, duae rectae EC, ED non ad easdem partes sumtae, angulos ad verticem AEC, DEB aequales fecerint: ipsae rectae CE, ED in directum sibi inuicem erunt.

Nam 2 recti $\equiv \angle AEC + CEB \equiv \angle DEB + CEB$. Ergo CE, ED sunt in directum. β . 13. 1.
a. hyp. & 2.
ax.

* 4. *Schol.* Si quatuor rectae EA, EB, EC, ED ab vno puncto E exeuntes, angulos oppositos ad verticem aequales inter se fecerint: erunt quaelibet duae lineae AE, EB, & CE, ED in directum positae. a. 14. 1.

Nam quia ang $AEC + AED + CEB + DEB \equiv 4$ rectis: erit $AEC + AED \equiv DEB + CEB$. Ergo CED & AEB sunt rectae lineae. β . 2. schol.
v. hyp. &
2. ax.
 β . 7. ax.
a. 14. 1.

PROP. XVI. THEOR.



Omnis trianguli ABC vno latere BC producto ad D: angulus exterior ACD maior est utrolibet interiorum & oppositorum BAC, ABC.

Secetur AC bifariam in E, & ducta recta BE

producat ad F, & ponatur $EF = EB$, & ducatur FC. Quoniam igitur $AE = EC$, & $EB = EF$, & ang. $AEB = FEC$: erit ang. $BAE = ACF$. Sed ang. $ACD > ACF$. Ergo ang. $ACD > BAE$. β . 10. 1.
v. 3. 1.
 β . 15. 1.
i. 4. 1.
a. 9. ax.
a. 14. ax.

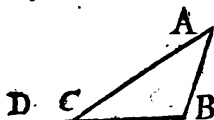
Eodem modo, si BC bifecetur in I, & recta AI producat, donec $IH = IA$, & iungatur HC,

HC, & producat^r etiam AC ad G, demonstra-
bitur. esse ang. BCG, vel ACD > ABC,
Q. E. D.

PROP. XVII. THEOR.

*Omnis trianguli ABC duo anguli duobus re-
ctis sunt minores, quomodocunque sumti.*

μ. 16. l.
ν. 4. 2x.

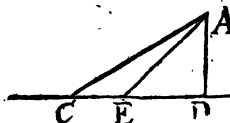


Producatur enim BC ad
D. Et quia ang. ACD
> ^μ ABC: erit ACD +
ACB > ^ν ABC + ACB.

ξ. 13. l.
ο. 14. 2x.

Sed ACD + ACB = ^ξ 2 rectis. Ergo ang.
ABC + ACB < ^ο 2 rectis. Eodem modo, pro-
ducta CA, demonstrabitur esse ACB + CAB
< 2 rectis; item, producta AB, esse CAB +
ABC < 2 rectis. Q. E. D.

* 1. Schol. Hinc in omni triangulo, cuius vnus
angulus est rectus, vel obtusus, reliqui acuti
sunt.



* 2. Schol. Si recta AE cum
alia CD angulos inaequales
faciat, vnum AED acutum,
& alterum AEC obtusum:

linea perpendicularis AD, ex quouis eius puncto A
ad aliam illam CD demissa, cadet ad partes anguli
acuti AED.

π. 10. & 11.
def.

ρ. 17. l.

σ. 5. l.

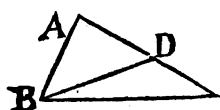
Nam si AC, ad partes anguli obtusi ducta, dicatur
perpendicularis: in Δ AEC erit ang. AEC + ACE
> ^π 2 rectis. Quod fieri nequit ^ρ.

* 3. Schol. Omnes anguli trianguli aequilateri,
& duo anguli trianguli isoscelis ad basin, ^σ acuti
sunt.

PROP.

PROP. XVIII. THEOR.

Omnis trianguli ABC maius latus AC maiorem angulum ABC subtendit.

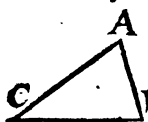


Quum enim $AC > AB$:
fiat τ $AD = AB$, & iun- τ . 3. 1.
gatur BD. Iam est ν ang. ν . 16. 1.

$\angle ADB > \angle ACB$, & ang.
 $\angle ABD = \angle ADB$: ergo ang. $\angle ABD > \angle ACB$, & ϕ . 5. 1.
a potiori ang. $\angle ABC > \angle ACB$. Q. E. D. χ . 14. 22.

PROP. XIX. THEOR.

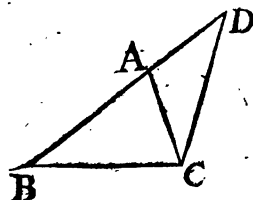
Omnis trianguli ABC maiori angulo B maius latus AC subtenditur.



Si enim ang. $B > C$, nec tamen
 $AC > AB$: aut erit $AC = AB$,
aut $AC < AB$. Si esset $AC =$
 AB : foret ang. $B = \angle C$; contra ψ . 5. 1.
hypothesin. Et si $AC < AB$, foret ang. $C >$ ω . 18. 1.
 B ; etiam contra hypothesin. Ergo $AC >$
 AB . Q. E. D.

PROP. XX. THEOR.

Omnis trianguli ABC duo latera sunt maiora reliquo, quomodocunque sumta.



Sumantur BA, AC, &
in producta BA capia- α . 3. 1.
tur α $AD = AC$; duca-
tur DC. Ergo angulus

$\angle ADC = \angle ACD$. Sed β . 5. 1.

ang. $\angle BCD > \angle ACD$. γ . 9. 22.

Quare $\angle BCD > \angle BDC$. δ . 19. 1.

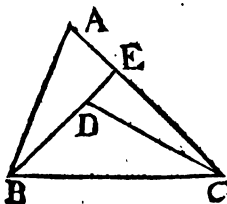
Ergo δ $BD > BC$, ideoque quum $BD = BA$
 $+ AC$, erit $BA + AC > BC$. Eodem mo- ϵ . 14. 22.
do ostendemus esse $AB + BC > AC$, & AC
 $+ BC > AB$. Q. E. D.

B 2

PROP.

PROP. XXI. THEOR.

Si a terminis B, C unius lateris trianguli ABC duae rectae BD, CD intus constituentur: hae reliquis duobus trianguli ABC lateribus AB, AC, minores quidem erunt, angulum vero BDC maiorem, quam A, comprehendent.



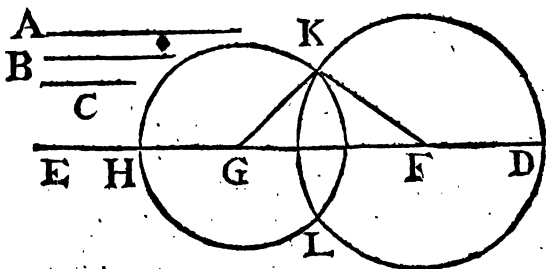
η. 20. 1.
3. 4. 22.

Producatur enim BD ad E. Et quum ABE fiat Δ : erit $AB + AE > EB$; ideoque $AB + AC > EB + EC$. In Δ EDC est $CE + ED > CD$; ideoque $CE + EB > CD + DB$. Quare multo magis $AB + AC > CD + BD$. Q. E. Imum.

1. 16. 1.

Angulus BDC $>$ CED $>$ A. Ergo & ang. BDC $>$ A. Q. E. Idum.

PROP. XXII. PROBL.



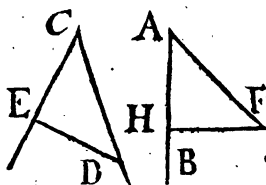
E tribus rectis, quae tribus rectis datis A, B, C, sint aequales, triangulum constituere. Oportet autem duas, utcumque sumtas, maiores esse reliqua.

Pona-

Ponatur recta DE, finita quidem ad D, infinita vero versus E, & fiat $DF = A$, & $FG = B$, & $GH = C$. Centro F intervallo FD describatur \wedge circulus DKL, item centro G \wedge 3. post. intervallo GH circulus HLK; & ducantur rectae KF, KG.

Quoniam ergo $KF = FD = A$; & $GK = GH = C$; & $GF = B$: ex tribus rectis KF, GK, GF, tribus A, C, B aequalibus, constitutum est triangulum KGF. Q. E. F.

PROP. XXIII. PROBL.



Ad datam rectam AB, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE angulum rectilineum aequalem constituere.

Sumantur in vtraque recta CD & CE puncta quaevis D, E, & ducatur recta DE, & e tribus rectis lineis, quae tribus CE, CD, DE aequales sint, constituatur $\triangle AHF$, ita vt $AF = CD$, & $AH = CE$, & $HF = DE$.

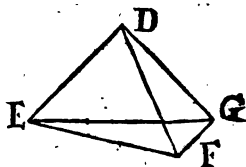
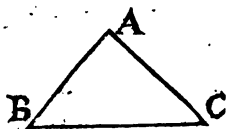
Quia ergo $AF = CD$, & $AH = CE$, & basis $HF =$ basi ED : erit ang. A $=$ DCE. Q. E. F.

PROP. XXIV. THEOR.

Si duo triangula ABC, DEF habeant duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF aequalia, alterum alteri; angulum autem A angulo EDF maiorem, ab aequalibus rectis comprehensum: etiam basis BC basi EF maiorem habebunt.

B 3

Quoniam



p. 23. 1.

e. 3. 1.

τ. hyp.

u. 4. 1.

φ. 5. 1.

x. 19. 1.

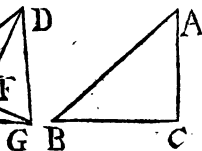
ψ. 9. ax.

ω. 21. 1.

α. 5. ax.

Quoniam enim ang. $A > EDF$, constitua-
tur^ε ad rectam DE & ad eius punctum D ang.
 $EDG = A$, & capiatur^σ $DG = AC$ vel $= DF$.
Ducantur FG, EG . 1. *Cas.* Si EG cadit supra
 EF ; quum in Δ is ABC, DEG praeterea sit AB
 $= DE$ ^τ: erit basis^υ $BC =$ basi EG . Rursus
quia $DG = DF$, ideoque ϕ ang. $DFG =$
 DGF : erit ang. $DFG > EGF$, & multo magis
 $EFG > EGF$. Quare in ΔEGF erit \approx latus
 $EG > EF$. Ergo & $BC > EF$. Q. E. D.

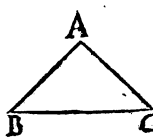
* 2. *Cas.* Si EG cadit in EF : liquet^ψ esse
 $EG > EF$, ideoque $BC > EF$. Q. E. D.



* 3. *Cas.* Si EG
cadit infra EF .
Quoniam^ω DG
 $+ GE > DF +$
 FE ; si hinc inde

auferantur aequales DG, DF : manet^α GE
 $> FE$. Ergo & $BC > EF$. Q. E. D.

PROP. XXV. THEOR.



Si duo triangula
 ABC, DEF habeant
duo latera AB, AC ,
duobus lateribus DE ,
 DF aequalia alterum alteri, basin autem BC habe-
ant

aut basi EF maiorem: habebunt etiam angulum A maiorem angulo D, qui ab aequalibus rectis comprehenditur.

Nam si ang. A non maior est quam D: aut est $A = D$, aut $A < D$. Sed si $A = D$: β erit β . 4. 1. $BC = EF$; contra hypothesin. Si ang. $A < D$: erit γ $BC < EF$; etiam contra hypothesin. γ . 24. 1. Ergo ang. $A > D$. Q.E.D.

PROP. XXVI. THEOR.

Si duo triangula ABC, DEF duos angulos B, ACB, duobus angulis E, F aequales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri aequale, vel quod aequalibus adiacet angulis, vel quod uni aequalium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus aequalia, alterum alteri, & reliquum angulum BAC reliquo D aequalem habebunt.



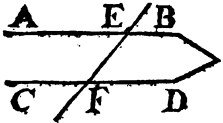
1. Hyp. Sit $B = E$, $ACB = F$ & $BC = EF$. Dico $AB = DE$, & $AC = DF$, & ang. $BAC = D$. Si enim non est $AB = DE$, sit alterutra $AB > DE$, & fiat δ $BG = DE$, & iungatur GC. δ . 3. 1. Quoniam ergo $BC = EF$ & $BG = DE$, & ang. $B = E$: erit ϵ $GCB = DFE = \zeta$ ACB . Q. E. A. ϵ . 4. 1. ζ . hyp.

2. Hyp. Sit $AB = DE$. Dico, fore $BC = EF$, & $AC = DF$, & ang. $BAC = D$. Nam si dicatur $BC > EF$, ponatur δ $BH = EF$ & ducatur AH. Et quia ζ $AB = DE$, & $BH = EF$,
B 4 & ang.

6. 4. 1.
2. 16. 1.

& ang. $B = E$; erit \therefore ang. $BHA = F = ACB$.
Q. E. A⁹. Ergo $BC = EF$, ideoque \therefore & AC
 $= DF$ & ang. $BAC = D$. Q. E. D.

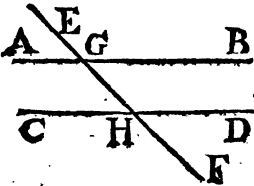
PROP. XXVII. THEOR.

 *Si in duas rectas lineas*
AB, CD recta linea EF
incidens alternos angu-
los AEF, EFD inter se
aequales fecerit; parallelae erunt rectae lineae
AB, CD.

6. 34. def.
2. 16. 1.

Si enim non sint parallelae: productae ad
alterutram partem \therefore conueniant, velut in pun-
cto G. Ergo ang. AEF extra triangulum
EGF maior \therefore erit interno EFD; contra hypo-
thesin, Ergo AB, CD sunt parallelae. Q. E. D.

PROP. XXVIII. THEOR.

 *Si in duas lineas AB,*
CD recta linea EF in-
cidens exteriorem an-
gulum EGA interiori
& opposito ad easdem
partes EHC aequalem
fecerit; vel interiores
& ad easdem partes AGH, GHC duobus rectis
aequales: rectae lineae AB, CD erunt inter se
parallelae.

2. 19. 1. &
1. 22.
2. 27. 1.

1. Hyp. Quia ang. $EGA = EHC$: erit \therefore &
ang. $BGH = EHC$ alterno. Parallelae igitur \therefore
sunt rectae AB & CD. Q. E. D.

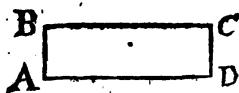
2. Hyp. Quia ang. $AGH + GHC = 2$ re-
ctis $=$ $AGH + BGH$: erit, ablato commu-
ni

ni AGH, ang. BGH \equiv alterno GHC. Er- §. 3. ax.
 go^u AB, CD, sunt parallelae. Q. E. D. μ . 27. 1.

PROP. XXIX. THEOR.

In parallelas rectas lineas AB, CD recta li- Figura pro-
nea EF incidens, & alternos angulos BGH, pol. 28.
GHC inter se aequales, & exteriorem EGA
interiori & opposito ad easdem partes GHC
aequalem, & interiores ad easdem partes AGH,
GHC duobus rectis aequales efficit.

Si enim ang. BGH & GHC inaequales sint:
 alter e. gr. BGH maior erit. Ergo erit \circ BGH \circ 4. ax.
 $+ AGH > GHC + AGH$. Sed BGH $+ AGH \equiv$ π 2 rectis. Ergo ang. GHC $+ AGH$ π . 13. 1.
 < 2 rectis. Quare \circ rectae AB, CD produ- \circ 11. ax.
 ctae versus A concurrent, ideoque \circ non \circ . 34. def.
 erunt parallelae. Quod est contra hypothe-
 sin. Ergo ang. BGH \equiv GHC, Ergo quum π . 15. 1.
 ang. EGA $\pi \equiv$ BGH, erit etiam \circ ang. EGA \equiv ν . 1. ax.
 GHC. Hinc \circ ang. EGA $+ AGH \equiv$ AGH ϕ . 2. ax.
 $+ GHC$. Sed π ang. EGA $+ AGH \equiv 2$ re-
 ctis. Ergo \circ ang. AGH $+ GHC \equiv 2$ re-
 ctis. Q. E. D.



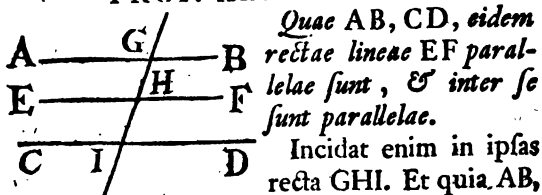
* Schol. Hinc omne paral-
 lelogrammum AC habens
 vnum angulum rectum A
 est rectangulum.

Nam A $+ B \equiv$ π 2 rectis. Ergo quum A re- π . 29. 1.
 ctus sit, B etiam rectus ψ erit. Eodem argumento ψ . 3. ax.
 D & C recti sunt.

B;

PROP.

PROP. XXX. THEOR.



Quae AB, CD, eidem
rectae lineae EF paral-
lelae sunt, & inter se
sunt parallelae.

Incidat enim in ipsas
recta GHI. Et quia AB,

α. 29. I.

EF parallelae sunt: α ang. AGH = GHF.

α. 1. 2X.

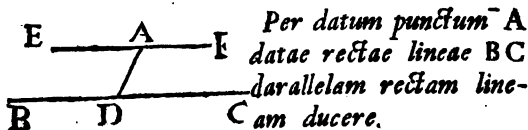
Rursus quia EF, CD parallelae: ang. HID =

β. 27. I.

GHF. Ergo α ang. AGH = alterno HID,

ideoque β rectae AB, CD parallelae. Q. E. D.

PROP. XXXI. PROBL.



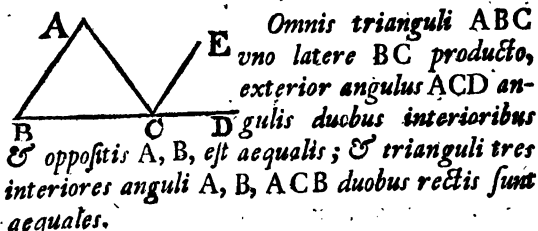
Per datum punctum A
datae rectae lineae BC
parallelam rectam line-
am ducere.

γ. 23. I.

δ. 27. I.

Sumatur in BC punctum quodvis D, & iun-
gatur AD, & fiat ang. γ EAD = ADC, &
producat̃ur EA ad F. Erunt δ EF, BC paral-
lelae. Q. E. F.

PROP. XXXII. THEOR.



Omnis trianguli ABC
uno latere BC producto,
exterior angulus ACD an-
gulis duobus interioribus
& oppositis A, B, est aequalis; & trianguli tres
interiores anguli A, B, ACB duobus rectis sunt
aequales.

ε. 31. I.

ξ. 29. I.

η. 2. 2X.

Ducatur enim per C ipsi AB parallela CE:
& erit ang. ACE = ∠ A; item ∠ ECD = ∠ B
Quare η ACD = A + B. Quod erat unum.

Iam

Iam addito communi angulo ACB, erit
 $ACD + ACB = A + B + ACB$. Sed ACD ^{4. 2. ax.}
 $+ ACB =$ ^{9. 13. 1.} 2 rectis. Ergo & anguli $A +$
 $B + ACB = 2$ rectis. *Quod erat alterum.*

* *Scholia.*

1. Tres simul anguli cuiusvis trianguli aequales sunt tribus simul cuiuscunque alterius. Vnde

2. Si in vno triangulo duo anguli (aut singuli, aut simul) aequales sint duobus angulis in altero triangulo: etiam reliquus reliquo aequalis est. Item, si duo triangula vnum angulum vni aequalem habeant: reliquorum summae aequantur.

3. In triangulo si vnus angulus rectus sit: reliqui vnam rectum conficiunt.

4. Si in isoscele angulus, aequis cruribus contentus, rectus est: reliqui ad basin sunt semirecti.

5. Trianguli aequilateri angulus facit duas tertias vnus recti. Nam $\frac{1}{3} 2$ rect. $= \frac{2}{3}$ recti.

6. Huius propositionis beneficio, cuiuslibet figurae rectilineae tam interni quam externi anguli quot rectos conficiant, innotescit per duo sequentia theoremata.

Theor. I.



Omnes simul anguli cuiuscunque figurae rectilineae conficiunt bis tot rectos, demtis quatuor, quot sunt latera figurae.

Ex quouis puncto intra figuram ducantur ad omnes figurae angulos rectae, quae figuram resolvent in tot triangula, quot habet latera. Quare quum singula triangula conficiant dupl. rectos: omnia simul conficient bis tot rectos, quot sunt latera. Sed anguli circa dictum punctum conficiunt

ciunt quatuor rectos. Ergo si ab omnium triangulorum angulis demas angulos circa id punctum; anguli reliqui, qui componunt angulos figurae, conficiunt bis tot rectos, demtis quatuor, quot sunt latera figurae. Q. E. D.

Hinc omnes eiusdem speciei rectilineae figurae aequales habent angulorum summas.

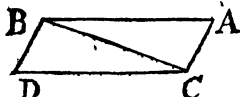
Theor. II.

Omnes simul externi anguli cuiuscunque figurae rectilineae conficiunt quatuor rectos.

Nam singuli interni figurae anguli cum singulis externis conficiunt duos rectos. Ergo interni simul omnes cum omnibus simul externis conficiunt bis tot rectos, quot sunt latera figurae. Sed (vt modo ostensum est) interni simul omnes etiam, cum quatuor rectis, efficiunt bis tot rectos, quot sunt latera figurae. Ergo externi anguli quatuor rectis aequantur. Q. E. D.

Hinc omnes cuiuscunque speciei rectilineae figurae aequales habent externorum angulorum summas.

PROP. XXXIIL THEOR.



Quae rectae AC, BD, aequales & parallelae AB, CD ad eandem partes coniungunt, ipsae etiam sunt aequales & parallelae.

n. 29. I.

λ. 4. I.

μ. 27. I.

Iungatur enim BC: & quia \sphericalangle ang. $ABC = BCD$, & per hyp. $AB = CD$, & latus BC commune; erit $\triangle ACB = BDC$ & ang. $ACB = CBD$, ideoque \sphericalangle rectae AC & BD parallelae erunt. Q. E. D.

PROP.

PROP. XXXIV. THEOR.

Fig. prop.
33.

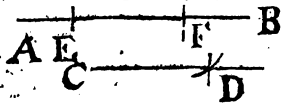
Parallelogrammorum spatiorum ABCD tam latera opposita ($AB=CD$, $AC=BD$) quam anguli oppositi ($A=D$, $ABD=ACD$) inter se aequantur; & ipsa diameter BC bisariam secat.

Quoniam AB, CD parallelae sunt: \angle erit \angle hyp. ang. $ABC=DCB$. Rursus ob AC, DB parallelas, erit \angle ang. $DBC=BCA$. Et latus BC est commune. Quare \angle AC=BD, & AB=CD, & ang. $A=D$. Et quia erat ang. $ABC=DCB$, & ang. $DBC=BCA$: toti ang. ABD, ACD aequantur. Denique, quum sit $AC=BD$, & BC latus commune, & ang. $BCA=DBC$: tota \triangle a. ACB, CBD aequantur. Q. E. D.

* Scholium.

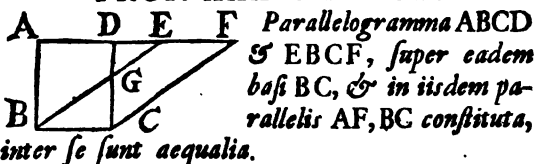
Omne quadrilaterum ABDC habens latera opposita aequalia, est parallelogrammum.

Nam per 8. 1. ang. $ABC=BCD$. Ergo AB, CD parallelae sunt. Eadem ratione ang. $BCA=DBC$. Quare AC, BD etiam parallelae sunt. Ergo ABDC est parallelogrammum. Q. E. D.

 Hinc expeditius per datum punctum C datae rectae AB ducatur parallela CD. Sume in AB quodvis punctum E. Centris E & C intervallo quovis duc aequales circulos F, D. Centro vero F spatio EC duc circulum FD, qui priorem CD secet in D. Erit ducta CD parallela. Nam, ut modo demonstratum est, E C D F est Pgr.

PROP.

PROP. XXXV. THEOR.



e. 34. 1.

τ. 2. ax.

υ. 29. 1.

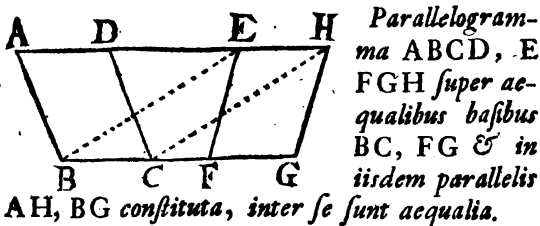
φ. 4. 1.

κ. 3. ax.

Nam quia ABCD, EBCF Pgra sunt: est $AD = BC = EF$. Adde communem DE, & erit $AE = DF$. Sed & $AB = DC$, & ang. $A = \angle CDF$. Ergo $\triangle ABE = \triangle DCF$. Auferatur commune DGE: erit κ trapezium $ADGB = EGCF$. Adde commune BGC: erit τ Pgr. $ABCD = EBCF$. Q. E. D.

* Reliquorum casuum, si E in D, vel inter D & A cadit, non dissimilis, sed simplicior & facilior est demonstratio.

PROP. XXXVI. THEOR.



ψ. 34. 1.

ω. 33. 1.

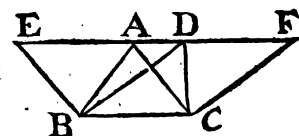
α. 35. 1.

β. 1. ax.

lungantur enim BE, CH. Et quia per hyp. $BC = FG = EH$; BC & EH sunt aequales. Sunt vero & parallelae (hyp.). Ergo ω BE & CH quoque sunt aequales ac parallelae. Quare EBCH est Pgr. & aequale α Pgro ABCD. Sed est etiam α Pgr. $EBCH = \text{Pgro EFGH}$. Ergo β Pgr. $ABCD = EFGH$. Q. E. D.

PROP.

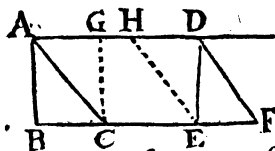
PROP. XXXVII. THEOR.



Triangula ABC, DBC super eadem basi BC & in iisdem parallelis AD, BC constituta, sunt inter se aequalia.

Producatur γ AD in E, F, & ducatur δ BE γ . 1. post. parallela CA, & CF parall. BD. Erit δ Pgr. δ . 31. 1. $BCAE = DBCF$. Sed $\triangle ABC \zeta = \frac{1}{2}$ Pgr. ζ . 35. 1. $BCAE$, item $\triangle DBC = \frac{1}{2}$ Pgr. $DBCF$. Ergo $\triangle ABC \eta = DBC$. Q. E. D. η . 7. ax.

PROP. XXXVIII. THEOR.



Triangula ABC, DEF super basibus aequalibus BC, EF, & in iisdem parallelis BF, AD constituta, sunt inter se aequalia.


Ducatur θ CG ipsi BA, & EH ipsi DF pa- θ . 31. 1. rallela. Pgra ergo sunt $ABCG$ & $DFEH$, & δ aequalia. Sed $\triangle ABC \kappa$ est $\frac{1}{2}$ Pgr $ABCG$, κ . 36. 1. & $\triangle DEF$ est $\frac{1}{2}$ Pgr $DFEH$. Ergo λ $\triangle ABC \lambda$ $= \triangle DEF$. Q. E. D. λ . 7. ax.

* *Scholium.*

Si basis $BC > EF$: liquet $\triangle BAC > \triangle EDF$.
Et si basis $BC < EF$: erit $\triangle BAC < \triangle EDF$.

PROP.

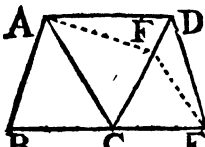
PROP. XXXIX. THEOR.

 Triangula ABC, DBC, aequalia, super eadem basi BC & ad easdem partes constituta, sunt in iisdem parallelis AD, BC.

μ. 31. 1.
ν. 37. 1.
ξ. hyp.
ο. 1. ax.
π. 9. ax.

Si enim AD, BC non sunt parallelae: ducatur per A ipsi BC parallela^μ AE, & ducatur EC. Quare $\triangle BEC = \triangle ABC = \triangle DBC$. Ergo triangula BEC, DBC aequalia sunt. Q. E. A^π. Similiter ostendemus, neque ullam aliam parallelam esse praeter rectam AD: Ergo AD est ipsi BC parallela. Q. E. D.

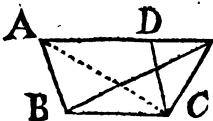
PROP. XL. THEOR.

 Triangula ABC, DCE aequalia, super basibus BC, CE † aequalibus, & ad easdem partes constituta, sunt in iisdem parallelis AD, BE.

ς. 31. 1.
ς. 37. 1.
τ. hyp. &
1. ax.
υ. 9. ax.

Sin minus: ducatur^ς per A ipsi BE parallela AF, & iungatur FE. Ergo $\triangle FCE = \triangle ABC$. Ergo & $\triangle FCE = \triangle DCE$. Q. E. A^υ.

PROP. XLI. THEOR.

 Si parallelogrammum ABCD, & triangulum BEC eandem habeant basin BC, sintque in iisdem parallelis AE, BC: parallelogrammum ABCD ipsius trianguli EBC duplum erit.

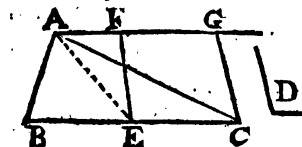
† Puta, in eadem recta positus.

Ducatur

Ducatur enim AC: & erit $\phi \triangle ABC = \triangle \phi$. 37. I.
 EBC. Sed Pgr. ABCD est \propto duplum $\triangle \propto$. 34. I.
 ABC. Ergo Pgr. ABCD est \downarrow duplum \triangle ax.
 EBC. Q. E. D.

PROP. XLII. PROBL.

Dato triangulo ABC aequale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo D.



Secetur BC bifa-
 riam α in E, & fiat α . 10. I.

α ang. CEF = D. α . 23. I.

Ducatur AG β β : 31. I.

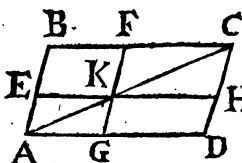
ipfi BC, & CG ipfi EF parallela. Erit FECG
 Pgr. aequale $\triangle ABC$.

Nam ducta AE, erit $\gamma \triangle ABE = \triangle AEC$. γ . 38. I.

Ergo $\triangle ABC \delta = 2 \triangle AEC = \triangle$ Pgr. FECG. δ . 2. ax.

Ergo ζ Pgr. FECG = $\triangle ABC$. Q. E. D. ζ . 41. I.
 ζ . 1. ax.

PROP. XLIII. THEOR.



In omni parallelogrammo
 ABCD complementa EF,
 DK eorum, quae circa
 diametrum AC sunt, pa-
 rallelogrammorum EG,
 FH, inter se sunt aequalia.

Nam $\eta \triangle ABC = \triangle ACD$. Et quia etiam η . 34. I.

EG & FH sunt Pgra, quorum diametri sunt

AK, KC: erit similiter $\triangle AEK = \triangle AKG$,

& $\triangle FKC = \triangle KCH$. Quare $\theta \triangle AEK + \triangle$ θ . 2. ax.

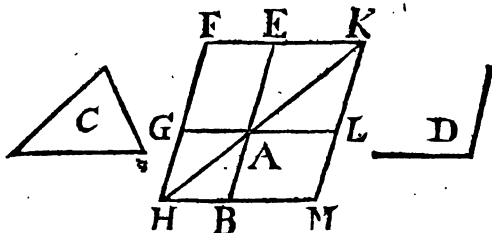
FKC = $\triangle AKG + \triangle KCH$. Ergo ι reliquum ι . 3. ax.

Pgr. BK = reliquo KD. Q. E. D.

C

PROP.

PROP. XLIV. PROBL.



Ad datam rectam lineam AB dato triangulo C aequale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo D.

x. 42. I.

λ. 29. I.
μ. 11. 2x.

Fiat * triangulo C = Pgr. AEFH in angulo GAE, dato D aequali, & ponatur AE in directum ipsi AB, & producatu FG ad H, & per B ipsi FE vel GA ducatur parallela BH, & iungatur HA. Et quia ang. EFH + FHB = ^λ 2 rectis, ideoque ang. EFH + FHA < 2 rectis: recta HA producta occurret ^μ productae FE in K. Per K agatur ipsi FH vel EB parallela, quae rectis GA, HB productis occurrat in L & M. Dico, AM esse Pgr. desideratum.

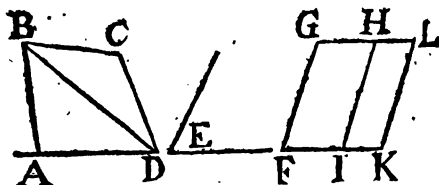
ν. 43. I.
ξ. constr.

Nam * Pgr. AM = AF ^ξ = Δo C. Et ang. LAB = GAE = ^ξ D. Ergo ad datam rectam AB in dato angulo D applicatum est Pgr. AM triangulo C aequale. Q. E. F.

PROP. XLV. PROBL.

Dato rectilineo ABCD aequale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo E.

Datum



Datum rectilineum resolue in triangu^{la} BA
D, BCD, & fac ° Pgr. $FH = \Delta BAD$, ita vt ° 42. 1.
ang. $F = E$. Deinde ad HI fac ° Pgr. $HK = \Delta BCD$,
vt dato angulo E aequalis sit HIK.

Quia ang. $F = E = HIK$: erit ang. $F +$
 $FIH = \angle HIK + FIH$. Sed $F + FIH = 2$ rectis.
Ergo ° & ang. $HIK + FIH = 2$ rectis, & IK est in directum ° ipsi FI. Ergo °
ang. $HIK = \angle$ alterno GHI, & adeo ang. HIK
 $+ IHL = \angle GHI + IHL$. Quare quum sint
ang. $HIK + IHL = 2$ rectis, erunt & GHI
 $+ IHL = 2$ rectis, & erit ° HL ipsi GH in °. constr.
directum. Hinc, ob GH, FK parallelas °, et °
GL, FK parallelas sunt; nec non GF, LK
eidem ° HI parallelas, ipsae, & sunt parallelas. ° 30. 1.
Ergo FGLK est Pgr; & ° quia $FH = \Delta ABD$,
& $HK = \Delta BCD$, totum Pgr. $FGLK = \angle$
toti rectilineo ABCD. Q. E. F.

* Scholium.



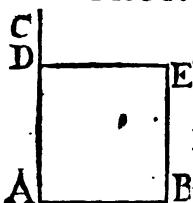
Hinc facile intuenitur excessus HE, quo rectili-
neum aliquod A superat rectilineum minus B: ni-
mirum si ad quamvis rectam CD applicentur Pgr.
 $DF = A$, & $DH = B$.

C 1

PROP

PROP. XLVI. PROBL.

A data recta linea AB quadratum describere.



Ducatur ex A in AB perpendicularis ψ AC, in qua capiatur $AD = AB$. Per B ipsi AB, & per B ipsi AC

ducantur α parallelae DE, BE. Erit BD quadratum, a data recta AB descriptum.

Est enim BD parallelogrammum. Ideo & $AB = DE$, & $AD = EB$. Sed $AD = AB$.

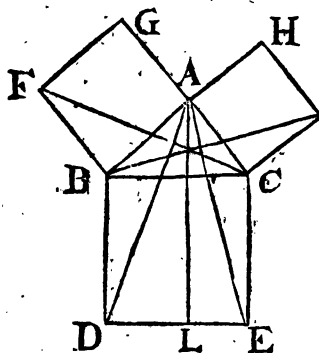
Ergo γ singula latera AD, AB, BE, DE inter se aequalia sunt. Quare BD est quadrilaterum aequilaterum. Et quoniam BD est Pgr.

habens unum rectum angulum A: δ anguli reliqui DE, B etiam recti erunt. Ergo BD est ϵ quadratum. Q. E. F.

* *Scholium.*

Eodem modo facile describes rectangulum, quod sub datis duabus rectis contineatur.

PROP. XLVII. THEOR.



In rectangulis triangulis ABC quadratum BC KED, quod a latere BC rectum angulum A subtendente describitur, aequale est quadratis BG, CH, quae a lateribus AB, AC rectum

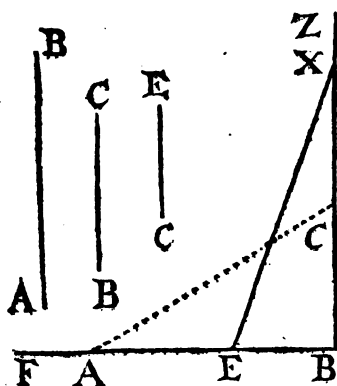
rectum angulum comprehendensibus, describuntur.

Per A ipsi BD vel CE ducatur ζ parallela ζ . 31. 1.
 AL, & iungantur AD, FC. Quoniam ergo
 vterque ang. BAC, BAG rectus est: AC &
 AG erunt \ast in directum. Eadem ratione & \ast 14. 1.
 BA, AH sunt in directum. Iam ang. DBC
 \equiv ζ FBA, ideoque ang. DBA \equiv FBC, & ζ 10. 2. ax.
 DB \equiv BC, ac BA \equiv FB: ergo Δ ABD \equiv FBC. 29. def.
 Sed Pgr. BL, quod cum Δ ABD Δ 4. 1.
 est in eadem basi BD & in iisdem parallelis
 BD, AL, est duplum Δ ABD; & quadra- 41. 1.
 tum BG, quod cum Δ FBC est in eadem basi
 FB & in iisdem parallelis FB, GC, est μ du-
 plum Δ FBC. Ergo \ast Pgr. BL \equiv BG. Simi- 6. 2. ax.
 liter ductis AE, BK ostendetur Pgr. CL \equiv
 CH. Totum ergo ζ quadratum BCED \equiv ζ 2. ax.
 quadratis BG + CH. Q. E. D.

** Scholium.*

Hoc nobilissimum & utilissimum theorema ab
 inventore *Pythagora* Pythagoricum dici meruit.
 Eius beneficio quadratorum additio & subtractio
 perficitur, quo spectant duo sequentia problemata.

Problema I.

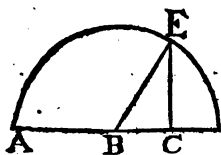


Datis quocunque quadratis unum omnibus aequale constituere.

Dentur quadra-
ta tria: quorum
latera sint AB,
BC, CE. Fac
ang. rectum FBZ
infinita habentem latera, in ea-
que transfer BA
& BC, & iunge

AC: erit $\pi ACq = ABq + BCq$. Tum AC transfer ex B in X,
& CE tertium latus datum transfer ex B in E, &
iunge EX: erit $\pi EXq = EBq$ (vel CEq) +
 BXq (vel ACq) = $CEq + BCq + ABq$.
Q. E. F.

Problema II.



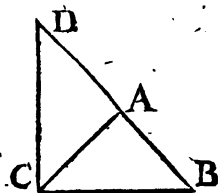
Datis duabus rectis inaequalibus AB, BC, exhibere quadratum, quo quadratum maioris AB excedit quadratum minoris BC.

Centro B intervallo BA describe circulum. Ex
C erige perpendicularem CE occurrentem peri-
pheriae in E. Ducatur BE. Erit BEq (vel BAq)
= $BCq + CEq$. Ergo $\pi BAq - BCq =$
 CEq . Q. E. F.

PROP.

PROP. XLVIII. THEOR.

*Si quadratum, quod describitur ab uno BC
lateralum trianguli ABC, aequale sit quadratis,
quae a reliquis trianguli lateribus AB, AC de-
scribuntur: angulus BAC a reliquis duobus
trianguli lateribus AB, AC comprehensus re-
ctus erit.*



Ducatur enim * ad AC ^{v. 11. l.}
perpendicularis AD, & fiat
AD = AB, & iungatur
DC.

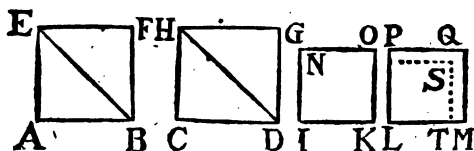
Quoniam ergo DA =
AB: erit & DAq = ABq, ideoque DAq
+ ACq = ABq + ACq. Sed DAq + ACq = DCq, & ABq + ACq = CBq. ^{2. ax. 47. l. hyp.}
Ergo DCq = CBq, ideoque DC = CB. Hinc
quoniam AD = AB, & latus AC commune;
erit * ang. BAC = CAD. Rectus autem est ^{v. 8. n.}
* CAD. Quare & ang. BAC rectus est. ^{Q. a. 10. def.}
E. D.

* Scholium.

Sumtum est in demonstratione, ex eo quod
DA = AB sequi DAq = ABq, & ex eo quod
DCq = CBq sequi DC = CB. Hoc vero mani-
festum fiet ex sequenti theoremate.

C 4

Theorema.

* *Theorema.*

Linearum rectarum aequalium AB, CD aequalia sunt quadrata AF, CG. Et quadratorum aequalium NK, PM aequalia sunt latera IK, LM.

Pro 1. Hyp. Duc diagonos EB, HD. Liqueat
 β . 34. 1. $AF = \beta$ duplo $\triangle EAB = \gamma$ 2 $\triangle HCD = \beta$
 γ . 4. 1. & CG. Ergo $AF = CG$. Q. E. D.
 6. ax.

Pro 2. Hyp. Si fieri potest, sit $LM > IK$: fac
 δ . 46. 1. $LT = IK$, sitque δ $LS = LT$ q. Ergo $LS =$
 ϵ . 1. part. $NK = \epsilon$ LQ. Q. E. A. Ergo $LM = IK$.
 ζ . hyp. Q. E. D.
 η . 9. ax.

* *Schol.*

Eodem modo quaelibet rectangula inter se aequaliter aequalia ostenduntur.

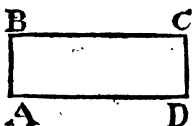


EV-

E V C L I D I S E L E M E N T O R V M L I B E R I I .

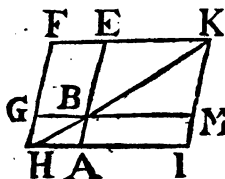
* * * * *

D E F I N I T I O N E S .



1. Omne *parallelogram-
mum rectangulum* ABCD
contineri dicitur *sub dua-
bus rectis lineis* AB, AD

quae rectum angulum A comprehendunt.



2. Omnis parallelogram-
mi FHIK vnumquodque
eorum, quae circa HK di-
ametrum ipsius sunt, pa-
rallelogrammorum EM,

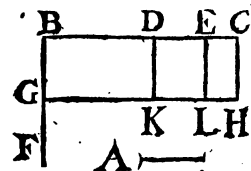
GA cum duobus complementis FB, BI *Gno-
mon* vocatur. (Hoc est, figura FHIMBEF vo-
catur gnomon, item figura FK I A B G F.)

Breuitatis gratia has duas notas in hoc libro
adhibemus.

Rgl. notat parallelogrammum rectangulum, ve-
luti Rgl. BAD; lege rectangulum BAD.

✕ indicat etiam rectangulum, contentum sub
duabus rectis, inter quas haec nota scripta
est. E. gr. BA ✕ AD indicat rectangulum
sub rectis BA & AD contentum.

PROPOSITIO I. THEOR.



Si sint duae rectae lineae A, BC, altera autem ipsarum BC secta fuerit in quocunque partes BD, DE, EC: rectangulum sub duabus rectis A, BC contentum aequale est iis rectangulis $A \times BD$, $+ A \times DE$, $+ A \times EC$, quae sub recta linea non secta A & singulis alterius BC segmentis continentur.

- α . 11. 1. Ducatur enim α a puncto B ipsi BC perpendicularis BF, atque β fiat $BG = A$, & per G ipsi BC parallela sit γ GH, per puncta vero D, E, C ipsi BG parallelae sint DK, EL, CH. Ergo δ Rgl. $BH = Rgl. BK + DL + EH$. Sed ϵ . constr. quia α $BG = A$, erit Rgl. $BH = \alpha$ $A \times BC$, & ζ . 1. def. 2. Rgl. $BK = A \times BD$. Et quia η $DK = EL = BG = A$, erit Rgl. $DL = A \times DE$, & Rgl. $EH = A \times EC$. Quare $A \times BC = A \times BD + A \times DE + A \times EC$. Q. E. D.

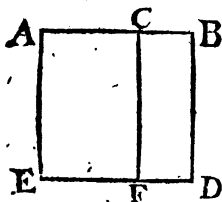
* Scholium.

Hinc si fuerint duae rectae Y, Z, secenturque ambae in quocunque partes; rectangulum sub totis aequale est rectangulis sub partibus.

- Nam sint rectae Z partes A, B, C, & rectae Y partes D, E. Quia $D \times Z = D \times A + D \times B + D \times C$; & $E \times Z = E \times A + E \times B + E \times C$; & $Y \times Z = D \times Z + E \times Z$: erit δ $Y \times Z = D \times A + D \times B + D \times C + E \times A + E \times B + E \times C$. Q. E. D.

PROP.

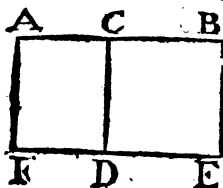
PROP. II. THEOR.



Si recta linea AB secetur
victunque in C: rectangula
sub tota AB & utroque se-
gmento AC, CB, conten-
ta aequantur quadrato to-
tius AB.

Describatur ex AB quadratum ABDE, ^{46. 1.}
& per C ducatur ^{31. 1.} alterutri AE, BD parallela
CF. Est igitur $AD = Rgl. AF + CD =$
 $AE \times AC, + BD \times CB = AB \times AC, +$ ^{29. def. 1.}
 $AB \times CB$, quia ^{1.} $AE = BD = AB$. Ergo
 $Rgl. AB \times AC, + AB \times CB =$ quadrato
totius AD. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.

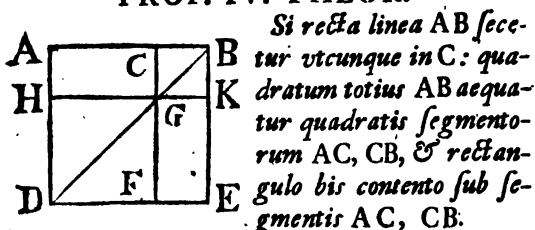


Si recta linea AB secetur
victunque in C: rectangu-
lum sub tota AB & uno
segmento BC contentum
aequatur rectangulo sub
segmentis AC, CB con-
tento, & praedicti segmenti CB quadrato.

Describatur ^{2.} ex CB quadratum BCDE, ^{46. 1.}
& producat ^{1.} ED in F & per A alterutri CD,
BE ducatur parallela AF. Ergo $Rgl. AE =$
 $Rgl. AD +$ quadrato CE. Et quia ^{29. def. 1.} $BE =$
 CB , est $Rgl. AE = AB \times BC$; item quia
 $CD = BC$, est $Rgl. AD = AC \times CB$.
Quare $AB \times BC = AC \times CB, + CBq.$
Q. E. D.

PROP.

PROP. IV. THEOR.



Si recta linea AB secetur utcumque in C: quadratum totius AB aequatur quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo bis contento sub segmentis AC, CB.

- ξ. 46. I. Describatur $\frac{1}{2}$ ex AB quadratum ADEB, iungatur BD, & per C alterutri AD, BE ducatur parallela CGF, per G vero alterutri AB, DE parallela HK. Erit ergo δ ang. BGC = ADB. Sed quia π AD = AB: ang. ϵ ABD = ADB; quare ang. BGC = ϵ CBG, & ideo CB = τ CG. Est vero ν CB = GK, & CG = BK. Ergo CGKB est aequilaterum. Sed est quoque ϕ rectangulum, ob angulum ABE π rectum. Quare CGKB est CBq. Eadem ratione HF est HGq, id est ν ACq. Et quoniam Rgl. AG = \times Rgl. GE, & ob CG = CB, Rgl. AG = AC \times CB: erit & Rgl. GE = AC \times CB. Ergo AG + GE = 2. AC \times CB. Ergo ABq = CK + HF + AG + GE = CBq + ACq + 2. AC \times CB. Q. E. D.

Aliter.

- ψ. 32. I. Quoniam ang. BAD π = recto: ang. ABD + ADB = ψ recto. Sed quum sit π AB = AD, ideoque ω ang. ABD = ADB; erit ang. ABD = $\frac{1}{2}$ recto. Et quoniam ang. BAD rectus est: ang. BCG etiam ω rectus erit. Quare in Δ BCG reliquus angulus BGC etiam = ψ $\frac{1}{2}$

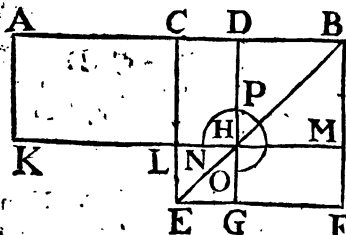
$\psi \frac{1}{2}$ recto. Hinc β $GC = CB$; & quia GC ψ 32. 1.
 $= \gamma BK$, ac $CB = GK$, erit CK aequilate- β 6. 1.
 rum. Est vero & rectangulum, ob ang. ABE γ 34. 1.
 rectum. Ergo CK est CBq . Eadem ratione
&c. ut supra.

Coroll. 1. Ex his manifestum est, in quadra-
 tis parallelogramma, quae sunt circa diame-
 trum, esse quadrata.

* *Cor. 2.* Item, diametrum cuiusvis quadrati
 angulos eius bisecare.

* *Schol.* Si $AC = \frac{1}{2} AB$: erit $ABq = 4 ACq$
 & $ACq = \frac{1}{4} ABq$. Et contra si $ABq = 4 ACq$:
 erit $AC = \frac{1}{2} AB$.

PROP. V. THEOR.



Si recta linea
AB secetur in
aequalia AC,
CB, & inae-
qualia AD,
DB: rectangu-
lum $AD \times DB$.

sub inaequalibus totius segmentis contentum
vna cum quadrato rectae CD inter puncta se-
ctionum aequatur quadrato dimidia BC.

Describatur δ ex CB quadratum CBEF, δ 46. 1.
 iungatur BE, & per D alterutri CE, BF paral-
 lela DFIG, ac per H alterutri AB, EF paral-
 lela KLM, per A denique alterutri CL, BF
 parallela AK ducatur. Et quia ϵ $CH = HF$, ϵ 43. 1.
 erit ζ $CM = DF$. Sed $CM = \gamma$ AL: quare ζ 2. 2x.
 $AL = DF$, &, addito communi CH, $AH \zeta =$ γ 36. 1.
 gnomoni

gnomoni NPO, &, tandem addito communi
 LG, $AH + LG = CBq$. Est autem ob DH
 9. 1. cor. $=^9 DB$, Rgl. $AH = AD \times DB$, & LG est
 4. 2. $=^9 CDq$. Ergo $AD \times DB + CDq$
 1. 34. 1. & LHq $=^9 CBq$. Q. E. D.
 schol. 48. 1.

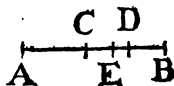
* Scholia.

1. Hoc theorema paullo aliter sic effertur: *Rectangulum sub summa AD & differentia DB duarum rectarum AC (vel CB) & CD, aequatur differentiae quadratorum ex ipsis,*

2. Si AB aliter diuidatur, propius scilicet puncto bisectionis, in E: dico $AE \times EB > AD \times DB$. Nam

4. 5. 2. $AE \times EB + CEq =^* CBq$
 $=^* AD \times DB + CDq$.

Ergo quum $CEq < CDq$:
 1. 5. ax. erit $AE \times EB > AD \times DB$. Q. E. D.



3. Hinc $ADq + DBq > AEq + EBq$. Nam
 1. 4. 2. $ADq + DBq + 2 AD \times DB =^* ABq =^*$
 $AEq + EBq + 2 AE \times EB$. Ergo quum $2 AE$
 $\times EB > 2 AD \times DB$: erit $ADq + DBq > AEq$
 $+ EBq$. Q. E. D.

4. Ex quibus simul patet, esse $ADq + DBq$
 2. 3. ax. $- AEq - EBq = 2 AE \times EB - 2 AD \times DB$.
 DB.

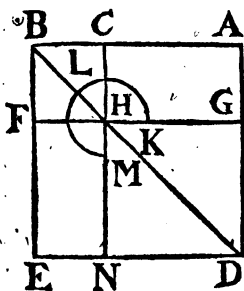
PROP.

BD contentum sub composita ex tota cum adie-
cta & adiecta, una cum quadrato dimidia CB,
aequatur quadrato compositae CD ex dimidia
& adiecta tanquam unius lineae.

Describatur ex CD quadratum CDFE, iungatur ED, per B alterutri CE, DF sit parallela BHG; & per H ipsi AD vel EF parallela KLM, & adhuc per A ipsi CL vel DM parallela AK. Itaque quia $AC = CB$, Rgl. $AL = CH = HF$. Addito communi CM, erit $AM = gnom. NPO$. Atqui ob $DM \propto DB$ est $AM = AD \times DB$. Ergo $AD \times DB = gnom. NPO$. Sed ob $CB = LH$, est $CBq = LG$. Ergo $AD \times DB + CBq = gnom. NPO + LG = CDq$. Q. E. D.

PROP.

PROP. VII. THEOR.



Si recta linea AB secetur utcumque in C: quadrata totius AB & unius segmentis BC simul sumta aequantur rectangulo $2 AB \times BC$ bis contento sub tota & dicto segmento, una cum ACq quadrato reliqui segmenti.

e. 43. l.

v. 2. ax.

v. 1. corol.

4. 2.

Describantur enim ex AB quadratum AE, & in eo reliquae figurae, ut antea. Quoniam $AH = HE$, erit $AF = CE$, & $AF + CE = 2 AF$. Sed $AF + CE = \text{gnom. KLM} + CF$: ergo $\text{gnomon KLM} + CF = 2 AF$. Iam quum CF sit BCq , & hinc $BF = BC$: erit $2 AB \times BC = 2 AF$, ideoque $\text{gnomon KLM} + BCq = 2 AB \times BC$. Ergo addito utrinque $GN = ACq$, erit $ABq + BCq = 2 AB \times BC + ACq$. Q. E. D.

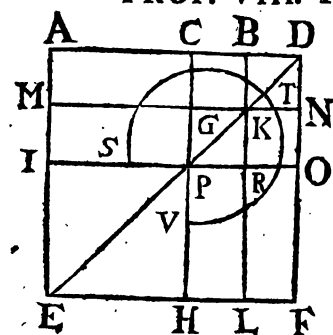
* Scholium.

Hinc quadratum differentiae duarum rectarum AB, BC, aequale est quadratis utriusque minus duplo rectangulo sub ipsis. Nam $ABq + BCq - 2 AB \times BC = ACq = (AB - BC)q$.

φ. 3. ax.

PROP.

PROP. VIII. THEOR.



*Si recta linea
AB secetur ut-
cunque in C;
rectangulum
quater conten-
tum sub tota AB
& uno e segmen-
tis BC, una cum
quadrato reliqui
segmenti AC,*

*aequatur quadrato composuæ ex tota AB &
praedicto segmento BC tanquam unius lineae.*

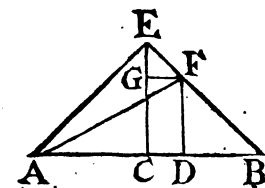
In producta AB fiat $BD = BC$, & describa-
tur ex AD quadratum AEFH, & reliquæ
figuræ describantur bis, quæ in præcedente
propositione. Ergo quia $CB = BD$, & $\propto CB \propto$ 34. 1.
 $= GK$, ac $BD = KN$: erit $GK = KN$. Ea-
dem ratione $PR = RO$. Hinc ψ Rgl. $CK \psi$ 36. 1.
 $=$ Rgl. BN , & Rgl. $GR =$ Rgl. KO . Sed
Rgl. $CK =$ Rgl. KO . Quare & Rgl. BN 47. 1.
 $=$ Rgl. GR ; ideoque $CK + BN + GR +$
 $KO = 4CK$. Porro $GC \propto = BK =$ BD, 2. 1. coroll.
& $BC = BD$, ideoque $CG = CB$. Sed & 4. 2.
 $GP = GK = CB$. Ergo $CG = GP$, & Rgl.
 $AG = \psi$ Rgl. MP . Eadem ratione ob PR
 $= RO$ est Rgl. $PL =$ Rgl. RF . Quum au-
tem in pgr. ML sit $MP =$ PL: erit $AG =$
 RF ; hinc $AG + MP + PL + RF = 4AG$.
Sed ostensum est, quod $CK + BN + GR +$
 $KO = 4CK$. Quare β totus gnomon STV 2. 2. 2.

D

= 4

$\equiv 4 AK$. Sed ob $BK = BD = BC$ est $AK = AB \times BC$. Ergo gnomon $STV \equiv 4 AB \times BC$. Denique quia $IP \equiv \propto AC$, est IH vel $\propto IPq = ACq$. Quare β totum quadratum AF , id est $(AB + BC)q = 4 AB \times BC + ACq$. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.



Si recta linea AB secetur in æqualia AC, CB & inæqualia AD, DB: quadrata inæqualium segmentorum ADq + DBq sunt dupla quadratorum a dimidia, & a recta inter puncta sectionum, 2 ACq + 2 CDq.

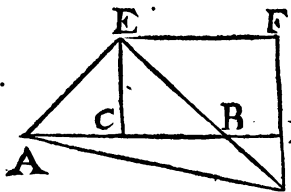
- Ex C ducatur γ in AB perpendicularis, in qua fiat $\delta CE = AC$. Iungantur AE, EB, & per D ipsi CE ϵ parallela DF, & per F ipsi AB parallela FG agantur, iungaturque AF.
- Itaque quia $\zeta EAC = AEC$, & ob ang. ACE rectum, $EAC + AEC = \propto$ recto: vterque ang. EAC, $AEC = \frac{1}{2}$ recti. Eadem ratione vterque ang. EBC, $BEC = \frac{1}{2}$ recti. Ergo totus ang. AEB rectus est. Et quia ang. GEF $\eta = \frac{1}{2}$ recti, EGF vero $\theta = ECB =$ recto: reliquus EFG etiam $\iota = \frac{1}{2}$ recti. Hinc ang. GEF = EFG, & $\kappa GF = EG$. Eadem ratione DF = DB. Et quoniam AC = CE, ideoque $\lambda ACq = CEq$: erit $ACq + CEq = 2 ACq$. Est vero $ACq + CEq \equiv \mu AEq$. Ergo AEq
- γ . 11. 1.
 δ . 3. 1.
 ϵ . 31. 1.
 ζ . 5. 1.
 η . 3. schol.
 θ . 32. 1.
 ι . 29. 1.
 κ . 32. 1.
 λ . 6. 1.
 μ . sch. 48. 1.

go $AEq = 2 ACq$. Eadem ratione est $EFq = 2 GFq = 2 CDq$. Quare $AEq + EFq$, ^{47. l.} id. est $AFq = 2 ACq + 2 CDq$. Sed $AFq = ADq + DFq = ADq + DBq$. Er- ^{2. ax.} go $ADq + DBq = 2 ACq + 2 CDq$. Q. E. D.

* Scholium.

Aliter effertur sic: *Aggregatum quadratorum ex summa AD & differentia DB duarum rectarum AC, CD aequatur duplo quadratorum ex ipsis AC, CD.*

PROP. X. THEOR.

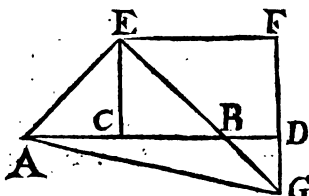


Si recta linea AB secetur bifariam in C, & illi recta quaecunque linea BD in directum G adiciatur: qua-

dratum compositae AD ex tota & adiecta, & quadratum adiectae BD simul sumta sunt dupla & quadrati ex dimidia AC, & quadrati compositae CD ex dimidia & adiecta, tanquam unus lineae.

Ducatur enim ² ex C ipsi AD, perpendicu- ^{2. n. l.} laris CE, & fiat alterutri AC, CB aequalis, ^{31. l.} iunganturque AE, EB, & per E quidem ^{29. l.} ducatur ipsi AD parallela EF, per D verò ipsi CE parallela DF. Et quoniam anguli FEC + EFD = ² rectis: ang. FEB + EFD < ² rect.

g. 11. ax.



2 recti: ideoque re-
ctae EB, FD pro-
ductae conueni-
ent & ad partes
BD. Producan-
tur & conueniant

in G, & iungatur AG.

c. 5. l.

r. 32. l.

v. 2. ax.

p. 15. l.

x. 6. l.

ψ. 34. l.

ω. sch. 48. l.

α. 47. l.

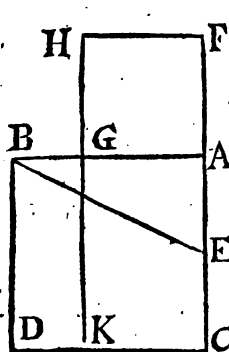
β. 34. l. &

sch. 48. l.

Itaque quia $\angle EAC = \angle CEA$, & ob ang.
ACE rectum, $\angle EAC + \angle CEA = \angle$ recto,
erit vterque ang. $\angle EAC, \angle CEA = \frac{1}{2}$ recti.
Eadem ratione vterque ang. $\angle CEB, \angle EBC = \frac{1}{2}$
recti. Ergo $\angle AEB = \angle$ recto. Quia $\angle DBG$
 $= \angle EBC$, & hinc $\angle DBG = \frac{1}{2}$ recti, BDG ve-
ro $= \angle ECB = \angle$ recto: erit \angle ang. BGD
 $= \frac{1}{2}$ recti $= \angle DBG$, ideoque $DG = BD$.
Et quum ergo $\angle BGD = \frac{1}{2}$ recti, ac ang. EFG
 $= \angle ECD = \angle$ recto: erit quoque \angle ang. FEG
 $= \frac{1}{2}$ recti $= \angle EGF$, & hinc $EF = FG$.
Porro quia, ob $AC = CE$, est $\angle ACq = \angle$
 $\angle CEq$, & $\angle ACq + \angle CEq = 2 \angle ACq$: erit \angle AEq
 $= 2 \angle ACq$. Simili ratione $\angle EGq = 2 \angle EFq =$
 $2 \angle CDq$. Quare $\angle AGq (= \angle AEq + \angle EGq)$
 $= 2 \angle ACq + 2 \angle CDq$. Sed $\angle AGq = \angle ADq$
 $+ \angle DGq = \angle ADq + \angle BDq$. Ergo $\angle ADq$
 $+ \angle BDq = 2 \angle ACq + 2 \angle CDq$. Q. E. D.

PROP.

PROP. XI. PROBL.



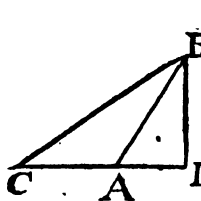
*Datam rectam lineam AB
ita secare, ut rectangulum
sub tota AB & altero se-
gmento aequetur quadrato
A reliqui segmenti.*

Describatur γ ex AB γ . 46. 1.
E quadratum ABDC, fece-
rurque δ AC bifariam in E, δ . 10. 1.
ducatur EB, & in producta
CEA fiat EF = EB, ac de- ϵ . 3. 1.

scribatur ex AF quadratum AFHG, & pro-
ducatur HG ad K. Dico AB ita sectam esse
in G, ut sit $AB \times BG = AGq$.

Nam ζ $CF \times FA + AEq = EFq = EBq$. Sed $EBq = ABq + AEq$. Ergo η . sch. 48. 1.
 $CF \times FA + AEq = ABq + AEq$, & θ . 47. 1.
hinc ι $CF \times FA = ABq$. Iam quia κ AF κ . 3. ax.
 $= FH$, erit $CF \times FA = Rgl. FK$. Est vero λ . 29. def. 1.
 $ABq = AD$ (per constr.) Ergo $Rgl. FK = AD$.
Hinc ablato communi GC, erit $FG = GD$.
Sed FG est AGq, & ob BD $= AB$ est $GD = AB \times BG$. Ergo $AB \times BG = AGq$. Q. E. D.

PROP. XII. THEOR.



In triangulis amblygoniis ABC quadratum lateris BC, subtendentis angulum obtusum A, maius est quam quadrata laterum AC, AB, angulum obtusum A comprehendentium, rectangulo bis contento sub uno laterum CA, circa angulum obtusum, in quod productum perpendicularis BD cadit, & recta AD extra intercepta a perpendiculari BD ad angulum obtusum. (Hoc est: $BCq = CAq + ABq + 2 CA \times AD$.)

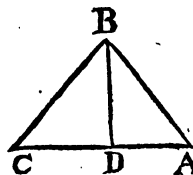
λ. 4. 2.

μ. 2. 2x.

ν. 47. 1.

Nam $^λ CDq = CAq + ADq + 2 CA \times AD$, ideoque $^μ CDq + DBq = CAq + ADq + DBq + 2 CA \times AD$. Sed $CDq + DBq = CBq$, & $ADq + DBq = ABq$. Ergo $CBq = CAq + ABq + 2 CA \times AD$. Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

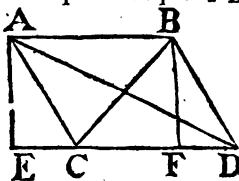


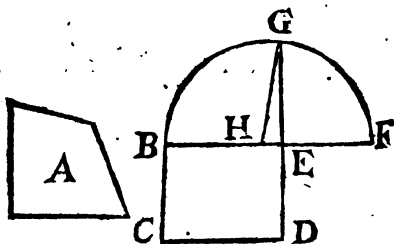
In triangulis oxygoniis ABC quadratum lateris BC, subtendentis angulum acutum A, minus est quam quadrata laterum AC, AB comprehendentium angulum acutum, rectangulo bis contento sub uno laterum circa angulum acutum CA, in quod perpendicularis BD cadit, & recta AD intus intercepta a perpendiculari ad angulum acutum

acutum. (Hoc est: $BCq + 2 CA \times AD = CAq + ABq.$)

Nam $\frac{1}{2} CAq + ADq = 2 CA \times AD + \frac{1}{2} 7. 2.$
 CDq ; hinc $\cdot CAq + ADq + BDq = 2 \cdot 2. ax.$
 $CA \times AD + CDq + BDq.$ Iam $\cdot ABq = 47. 1.$
 $= ADq + BDq$, & $BCq = CDq + BDq.$
 Ergo $CAq + ABq = BCq + 2 CA \times AD.$
 Q. E. D.

* Schol. Hinc demonstratur, in omni parallelogrammo ABDC quadrata e diametris AD, BC aequalia esse quadratis laterum simul sumtis. Nam ductis perpendicularibus AE, BF, est $ADq = DCq + CAq + 2 DC \times CE$, & $BCq + 2 DC \times CE = 12. 2.$
 $\times DF = CDq + BDq.$
 Est autem $CDq = ABq$; 13. 2.
 & ob ang. AEC = BFD, 34. 1.
 ac ACE = BDF, ac AC = BD, est CE = DF: 10. def. 1. & 10. ax.
 ergo $BCq + 2 DC \times CE = ABq + BDq.$ Quare \downarrow 26. 1.
 $ADq + BCq + 2 DC \times CE = ABq + BDq + DCq + CAq + 2 DC \times CE$, & ergo \downarrow 2. ax.
 $\cdot ADq + BCq = ABq + BDq + DCq + CAq.$ 3. ax.
 Q. E. D.





Dato rectilineo A aequale quadratum con-
stituere.

α. 45. 1. Constituat^r rectilineo A aequale ^α pgr.
 rectangulum BD. Si igitur $BE = ED$: erit
 β. 29. def. BD quadratum ^β desideratum., Sin minus:
 & 34. 1. erit alterutrum latus $BE > ED$, & tunc pro-
 ducatur BE, donec $EF = \gamma ED$, & bisecta ^δ
 γ. 3. 1. BF in H describatur circulus intervallo HB
 δ. 10. 1. vel HF, & producat^r DE in G. Dico fore
 $EGq = A$.

$\zeta. 5. 2.$ Nam iungatur HG: & est $^1 BE \times EF +$
 $\zeta. 15. def. \&$ HEq = HFq = 2 HGq. Sed ob ang. HEG
 $sch. 48. 1.$ rectum, est 3 HGq = EGq + HEq. Qua-
 $\eta. 1. sch. 13.$ re EGq + HEq = 4 BE \times EF + HEq,
 $\zeta. 47. 1.$ atque EGq = 5 BE \times EF. Est autem ob 6
 $\kappa. 3. ax.$ EF = ED, BE \times EF = Rgl. BD = 7 A.
 $\lambda. constr.$ Ergo EGq = 8 A. Q. E. D.

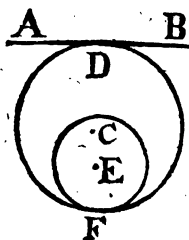
EV-

E V C L I D I S E L E M E N T O R V M

LIBER III.

DEFINITIONES.

1. *Aequales circuli* sunt, quorum diametri sunt aequales, vel quorum quae ex centris sunt aequales.



2. *Recta linea AB circum C contingere* dicitur, quae contingens circum (in D) & producta ipsum non secat.

3. *Circuli C, & E, contingere sese* dicuntur, qui contingentes se mutuo (in F) se non secant.

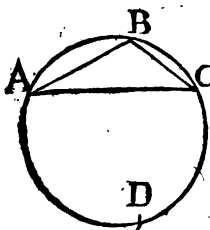


4. In circulo *aequaliter distare a centro G rectae* lineae HI, KL dicuntur, quando a centro ad ipsas perpendiculares GM, GN ductae sunt aequales.

5. *Magis autem distare a centro G* dicitur ea OP, in quam maior perpendicularis GQ cadit.

D5

6. Se-

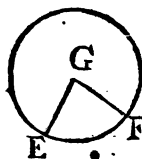


6. *Segmentum circuli* est figura ACBA, quae sub recta linea AC & circuli circumferentia ABC comprehenditur.

7. *Angulus segmenti* est ACD, qui recta linea AC & circuli circumferentia CD comprehenditur.

8. *Angulus in segmento* ACBA est, quando in circumferentia ABC segmenti sumitur aliquod punctum B, atque ab ipso ad terminos A, C, lineae eius AC, quae basis est segmenti, rectae lineae BA, BC ducuntur, angulus ABC a ductis lineis BA, BC comprehensus.

9. Quando autem comprehendentes angulum ABC rectae lineae BA, BC intercipiunt circumferentiam ADC: illi *circumferentiae* ADC *insistere angulus* ABC dicitur.

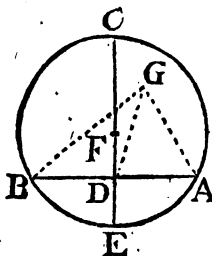


10. *Sector circuli* est, quando angulus EGF ad centrum G constiterit, figura GEFG contenta rectis lineis GE, GF angulum comprehendentibus, & circumferentia EF ab ipsis intercepta.

11. *Similia circularum segmenta* sunt, quae angulos capiunt aequales: vel in quibus anguli sunt inter se aequales.

PROP.

PROPOSITIO I. PROBL.

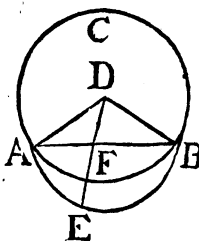
Dati circuli ACB centrum inuenire.

Ducatur in ipso recta AB vtcunque, quae bisece-
tur ^a in D. A puncto D ^{a. 10. 1.}
ipfi AB ad rectos ^b ducta ^{b. 11. 1.}
DC producat in E, & bi-
secetur CE in F. Dico,
punctum F centrum esse
circuli ABC.

Si negas: centrum esto G extra rectam
CE. (Nam in ea praeter F nullum ^c esse ^{c. 15. def. 1.}
poteft .) Ducantur GA, GD, GB. Ergo
 $GA = c GB$, & $AD = d DB$; latus vero ^{d. constr.}
GD commune: hinc ^e ang. $GDA = GDB$ ^{e. 8. 1.}
Est ergo ^f ang. GDA rectus, ideoque ^g an- ^{f. 10. def. 1.}
gulo CDA aequalis. Q. E. A ^{g. 9. 2x.}

*Coroll. Ex hoc perspicuum est, si in circulo recta
linea CD rectam AB bifariam & ad angulos rectos
secat, circuli centrum esse in secante CD.*

PROP. II. THEOR.



*Si in circumferentia cir-
culi ABC duo quaelibet pun-
cta A, B sumantur: quae
ipsa coniungit recta linea AB
intra circulum cadit.*

Si enim non: cadet extra,
vt AEB. Sumatur ^h circuli ^{h. 1. 3.}
centrum D, & ducantur rectae DA, DB,
DFE.

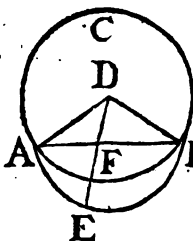
x. 15. def. 1.

λ. 5. I.

μ 16. L

y. 14: 2X.


ξ. 19. 1.



DFE. Quoniam ergo $DA = DB$: erit ang. $DAE = DBE$. Et quum trianguli ADE latus AE productum sit in B: erit ang. $DEB > DAE$, ergo & ang. $DEB > DBE$, & $DB > DE$.

Sed $DB = DF$. Quare $DF > DE$. Quod fieri nequit, quia E extra circumulum esse ponitur. Similiter ostendemus rectam AB nec in circumferentiam cadere. Ergo intus cadat necesse est. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.



Si in circulo ABC recta
 linea CD per centrum E
 ducta rectam lineam AB
 non ductam per centrum,
 bifariam secat in F: & ad
 angulos rectos ipsam seca-
 bit. Quod si ad angulos rectos ipsam AB secet:
 & bifariam secabit.

Ducantur EA, EB.

o. 15. def. 1.

π. 8. I.

p. 10, def. 1

σ. 10. 2X.

T. 5. 1.

у. 26. 1.

1. *Hyp.* Quoniam $AF = FB$, & $EA = EB$, & latus EF commune: est π ang. $AFE = BFE$, & ergo ϵ vterque rectus. Q. E. D.

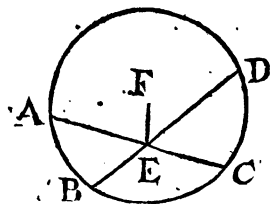
2. *Hyp.* Quoniam ang. $AFE = BFE$, & $EA = EB$, & ergo π ang. $FAE = FBE$: est ν $AF = FB$. Q. E. D.

* Coroll. Hinc in omni triangulo aequilatero & isosceli linea recta ab angulo verticis bifecans basin, perpen-

perpendicularis est basi; & contra perpendicularis ab angulo verticis bisecat basin; & perpendicularis e puncto medio basis angulum ad verticem bisecat.

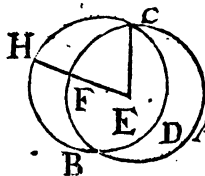
PROP. IV. THEOR.

Si in circulo ABCD duae rectae AC, BD non ductae per centrum se inuicem secant in E: sese bifariam non secabunt.



Si enim fieri potest, sit $AE = EC$, & $BE = ED$. Sumatur $\phi\phi$. 1. 3. centrum circuli F, iungaturque FE. Erit ergo \sphericalangle ang. FEA rectus, \sphericalangle . 3. 3. nec non ang. FEB rectus erit. Quare erit \sphericalangle ang. FEA = FEB. Q. E. A α . α . 9. ax.

PROP. V. THEOR.

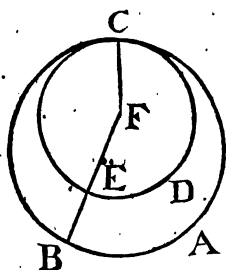


Si duo circuli ABC, CDH se inuicem secant in B, C: non erit ipsorum idem centrum.

Nam si fieri potest, sit E commune centrum. Iungatur CE, & ducatur recta EFH vtcunque. Erit ergo α , in circulo ABC, $EF = EC$, & in altero circulo, $EH = EC$, ideoque $EF = EH$. Q. F. N β . β . 9. ax. α . 15. def. 1.

PROP.

PROP. VI. THEOR.



Si duo circuli ABC, CDE sese intra contingunt in C: ipsorum idem centrum non erit.

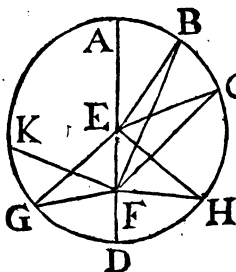
Si enim fieri potest, sit eorum idem centrum F. Iungatur CF, & ducatur vtcunque FEB.

7. 15. def. 1.
8. 9. ax.

Foret γ $FB = FC = FE$. Q. E. A δ .

PROP. VII. THEOR.

Si in circuli ABCD diametro AD aliquod punctum F sumatur, quod non sit centrum circuli, & ab eo F in circulum cadant quaedam rectae lineae AFD, FB, FC, FH: maxima quidem erit FA, in qua centrum E, reliqua vero FD minima; aliarum autem semper propinquior FB ei FC, quae per centrum, maior est remotiore FC; duaeque tantum aequales ab eodem puncto F in circulum cadent ex utraque parte minimae FD.



8. 20. 1.

2. 15. def. 1.
& 2. ax.
4. 14. ax.

9. 24. 1.

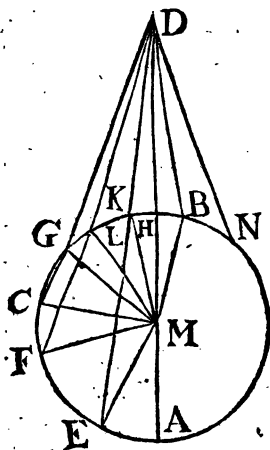
1. Iungantur EB, EC, EH. Et quia γ $FE + EB > FB$, ac $FE + EB = \gamma$ FA: erit $FA > FB$. Rursus quia $EB = EC$, & EF latus commune, & ang. BEF $>$ CEF: est γ $FB > FC$.

Eadem ratione & $FC > FH$. Rursus quia FH

$FH + FE > EH$, & $ED = EH$: est $FH + FE > ED$, ac ergo $FH > FD$. Maxi-^{9.} 5. ax. ma ergo est FA , minima FD , & $FB > FC > FH$. Q. E. D.

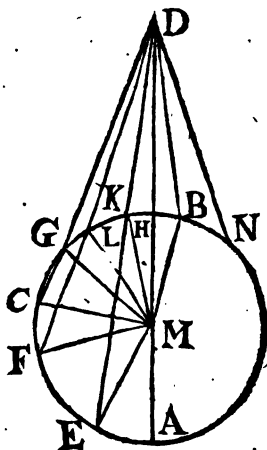
2. Fiat $\angle DEG = DEH$, & ducatur ^{23.} 1. FG ; & quum praeterea $EG = EH$, & communis EF : erit $\angle FG = FH$. Omnis autem ^{4.} 1. alia ut FK aut maior aut minor erit ^{per par-} tem. 1. quam FG . Ergo duae tantum aequales FH , FG in circulum cadent. Q. E. D.

PROP. VIII. THEOR.



Si extra circulum ABC aliquod punctum D sumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quaedam rectae lineae, quarum una DA per centrum M transeat, reliquae vero DE, DF, utcumque: earum quidem, quae in concavam circumferentiam cadunt, maxima est DA, quae per centrum transit, aliarum autem

DE, DF, DC semper propinquior ei DA, quae per centrum, maior est remotiore; earum vero, quae in connexam circumferentiam cadunt, minima est DH, quae inter punctum D & diametrum HA interiicitur; aliarum autem DK, DL,



DL, DG *semper quae propinquior minimae DH minor est remotiore*; *duaeque tantum aequales a puncto D in circulum cadunt ex utraque parte minimae DH.*

μ. 20. I.

ν. 15. def. 1.
& 2. ax.

ξ. 14. ax.

ο. 24. I.

fus quia $ME = MF$, & communis MD, & ang. $DME > DMF$: est $DE > DF$. Similiter $DF > DC$. Maxima ergo est DA, & huic propinquior remotiore semper maior. Q. E. D.

π. 5. ax.

ρ. 21. I.

2. Quia $MK + DK > MD$, & $MK = MH$: est $DK > DH$, vel $DH < DK$. Porro quum $DK + KM < DL + LM$, & $KM = LM$: est $DK < DL$. Eadem ratione $DL < DG$. Minima ergo est DH, & huic propinquior remotiore minor. Q. E. D.

σ. 23. I.

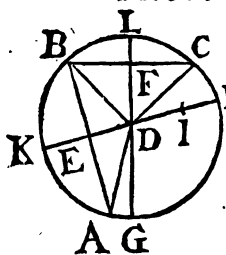
τ. 4. I.

υ. per par-
tem 2.

3. Ponatur $\angle BMD = \angle KMD$; & quia $KM = BM$, ac communis DM: est $\angle DK = \angle DB$. Et omnis alia ut DN in circulum cadens aut maior est aut minor, quam DB vel DK. Quare duae tantum rectae DK, DB aequales ex D in circulum cadunt. Q. E. D.

PROP.

PROP. IX. THEOR.



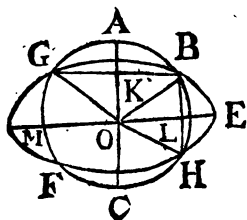
Si intra circulum ABC sumatur aliquod punctum D, atque ab eo in circulum cadant plures, quam duae rectae lineae DA, DB, DC aequales: punctum D, quod sumitur, erit centrum circuli.

Iungantur enim AB, BC, & bisecentur in E, F, & iunctae DE, DF ad K, H, L, G producantur. Quia ergo $AE = EB$, $ED = ED$, & basis $AD = BD$: est $\angle AED = \angle BED$. ϕ . 8. 1. Ergo KH ipsam AB bifariam & ad angulos rectos \propto secat, & ergo ψ in KH centrum circuli \propto . 10. def. 1 est. Eadem ratione & in LG est centrum ψ . cor. 1. 3 circuli ABC. Nullum autem punctum praeter D commune habent ω rectae LH, LG. ω . 12. ax. Ergo D est centrum circuli ABC. Q. E. D.

Aliter.

Si D non sit centrum circuli ABC: sit illud I. Ducatur recta HIDK. Erit ergo DC α . 7. 3. $\alpha > DB$. Sed & $DC = DB$ β . Q. E. A. β . hyp.

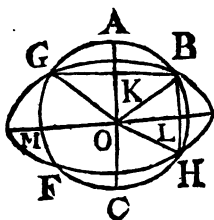
PROP. X. THEOR.



Circulus circulum in pluribus quam duobus punctis non secat.

Si enim fieri potest, circulus ABC circulum BEF secet in punctis

7. 10. 1.



2. cor. 1. 3.

4. 5. 3.

etis B, H, G. Iunctae BG, BH bisectae sint γ in K, L punctis, a quibus ipsis BG, BH ad rectos angulos ductae sint AK OC, EL OM. Erit ergo δ in vtraque AC, EM centrum circuli ABC, ideoque O erit centrum circuli ABC. Eadem ratione O est centrum circuli BEF. Q. F. N^o.

Aliter.

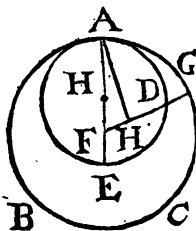
2. 1. 3.

4. 15. def. 1.

9. 9. 3.

Circuli ABC centrum sumatur ζ , quod sit O. Iungantur OG, OB, OH, quae α aequales erunt. Erit ergo O quoque centrum β circuli BEF. Q. F. N^o.

PROP. XI. THEOR.



Si duo circuli ABC, ADE sese intus contingant, & sumantur centra ipsorum F, H: recta linea ipsorum centra coniungens producta in circulorum contactum A cadet.

Si negas: sint centra F, H in alia recta FDG, quae non cadat in contactum A. Iungantur AF, AH. Erit ergo α $AH + HF > AF$ vel FG , & proinde β $AH > HG$. Sed $AH^\lambda = HD$. Ergo $HD >^\mu H G$. Q. F. N.

1. 20. 1.

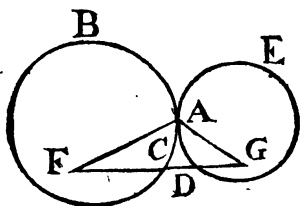
x. 5. ax.

A. 15. def. 1.

mu. 14. ax.

PROP.

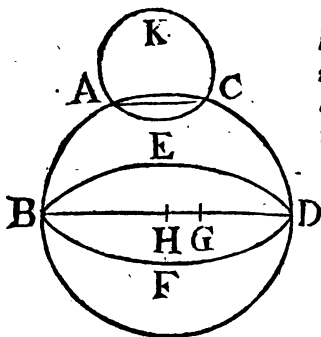
PROP. XII. THEOR.



Si duo circuli ABC, ADE sese extra contingant in A: recta linea ipsorum centra coniungens per contactum transibit.

Si enim centra F & G essent in alia recta FCDG per contactum A non transeunte: iunctis AF, AG, foret, ob $FC = FA$, & $GD = AG$, tota $FG > FA + AG$. Q. E. A ^{15. def. 1.} ^{20. 1.}

PROP. XIII. THEOR.



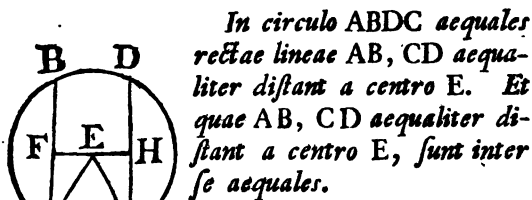
Circulus circum non contingit in pluribus punctis quam uno, siue intus, siue extra contingat.

1. Si enim fieri potest, contingat circulus ABDC circulus BEDF intus in duobus punctis B, D. Sumantur centra horum circulorum^o H, G, & iungatur HG, quae produ-^{o. 1. 3.} eta^o in puncta B & D cadet. Sed quia $BH = HD$, erit $BH > GD$, & a potiori $BG > GD$. Est vero $BG = GD$. Q. E. A. ^{11. 3.} ^{15. def. 1.} ^{14. ax.}

2. Si fieri potest, contingat circulus ACK circulum ABC in duobus punctis A, C extra.
E₂ Iunga-

- τ . 2. 3. Iungatur AC, quae τ intra vtrumque circum-
 lum cadet. Sed quia circulus AKC circum-
 lum ABC extra ν contingit: recta intra circum-
 lum AKC ducta extra circum-
 ϕ . 3. def. 3. lum ABC ϕ cadet.
 Ergo AC simul intra & extra circum-
 lum AKC cadet. Q. E. A.

PROP. XIV. THEOR.



*In circulo ABDC aequales
 rectae lineae AB, CD aequa-
 liter distant a centro E. Et
 quae AB, CD aequaliter di-
 stant a centro E, sunt inter
 se aequales.*

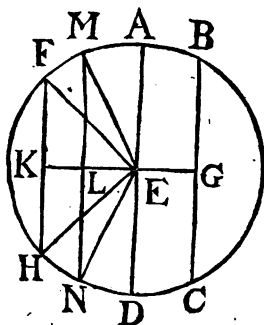
- χ . 12. 1. Ex centro E ad rectas AB,
 CD demittantur χ perpendi-
 culares EF, EH, & iungantur EA, EC.

- ψ . 3. 3. 1. Quia ergo ψ AF = AB: erit $\frac{1}{2}$ AB =
 AF. Eadem ratione $\frac{1}{2}$ CD = HC. Et quia
 ω . 7. ax. AB = CD: erit ω AF = HC. Deinde quia
 α . 15. def. 1. AE = α EC, & hinc β AEq = ECq: erit γ
 β . sch. 48. 1. AFq + EFq = HCq + EHq. Sed AFq
 γ . 47. 1. & = β HCq. Ergo δ EFq = EHq, ideoque β
 1. ax. EF = EH. Rectae ergo AB, CD a centro
 δ . 3. ax. E τ aequaliter distant. Q. E. D.
 ϵ . 4. def. 3.

2. Quia τ EF = EH, & hinc EFq = EHq:
 & praeterea EFq + AFq = γ EHq + CHq:
 erit AFq = δ CHq, & hinc AF = β CH,
 ζ . 6. ax. & AB = ζ CD. Q. E. D.

PROP.

PROP. XV. THEOR.

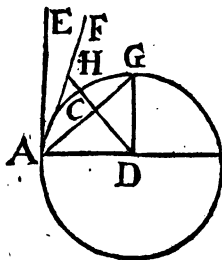


In circulo maxima quidem est diameter A D, aliarum vero semper propinquior B C centro E maior est remotiore F H.

Ducantur a centro
ad BC, FH perpen-
diculares EG, EK: &
erit $EK > EG$. Po-
7. 5. def. 3.
natur $EL = EG$, &

per L ipsi EK perpendicularis ⁹ ducatur ^{9. 11. 1.}
MLN, & iungantur EM, EN, EF, EH. Quo-
niam EL = EG, erit ' MN = BC. Quia ^{14. 3.}
ME = AE, & NE = ED: erit * ME + EN * ^{2. ax.}
= AD. Sed ME + EN > ^λ MN. Ergo ^{λ. 20. 1.}
AD > ^μ MN, & AD > BC. Deinde quia ^{μ. 14. ax.}
ME = FE, & NE = HE, ang. vero MEN
> FEH: erit ' basis MN > FH, ergo & BC ^{ν. 24. 1.}
> ^μ FH. Maxima ergo est AD, & BC ma-
ior quam FH. Q. E. D.

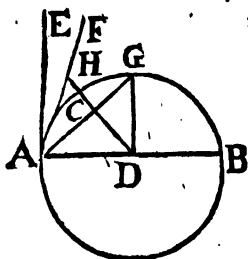
PROP. XVI. THEOR.



*Recta EA diametro AB
circuli ABC ad rectos an-
gulos ab extremitate A
ducta cadit extra circu-
lum. Et in locum, qui in-
ter rectam lineam AE, &
circumferentiam interi-
citur, altera recta linea*

E 3

NOTE



non cadet. Et semicirculi angulus CAB maior est quouis angulo rectilineo acuto, reliquis autem CAE minor.

1. Si fieri potest, cadat recta EA intus, & secet circumulum in G. Ex centro ducatur DG. Quoniam $DA = DG$, erit ang. $AGD = \angle GAD = \text{recto}$. Q. E. A°. Similiter ostenditur, EA nec in circumferentiam cadere posse. Ergo extra circumulum cadet. Q. E. D.

ξ. 5. 1.
θ. 17. 1.

2. Si fieri potest, cadat recta FA inter EA, & circumferentiam AC. A centro D ad AF ducatur perpendicularis DH. Et quoniam ang. AHD rectus π est, & ang. DAH recto DAE minor: erit ang. $DAH < \angle AHD$, & ergo $HD < AD$. Sed $AD = DC$; ergo $HD < DC$. Q. E. A°.

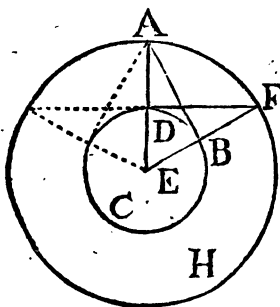
π. 10. def. 1.
θ. 10. & 14.
ax.
θ. 19. 1.
τ. 9. ax.

3. Si quis angulus rectilineus acutus vt FAB maior esset angulo semicirculi CAB, vel aliquis angulus vt FAE minor angulo CAE: recta FA caderet inter perpendicularem EA, & circumferentiam AC. Q. F. N.

v. 2. def. 3.
& 2. 3. *Coroll. Hinc, v recta linea, quae ad rectos angulos ducitur diametro circuli ab extremitate eiusdem, circumulum tangit, & quidem in unico puncto.*

PROP.

PROP. XVII. PROBL.



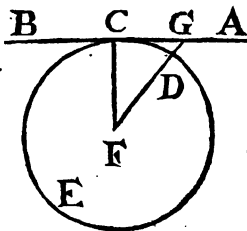
*A dato puncto A
rectam lineam ducere,
quae datum circulum
BCD contingat.*

Sumatur centrum
q̄ circuli E, & iun-
gatnr ADE, & cen-
tro E interuallo EA

describatur circulus AHF, & a puncto D ipsi
AE ad angulos rectos ducatur DF. Iun-
gantur EBF, ac AB, quae circulum continget.

Nam $EA = EF$, & $EB = ED$, & com-
munem angulum AEB continent. Ergo $\angle EBA = \angle FDE = \text{recto}$. Ergo AB circu-
lum BDC tangit. Q. E. F.

PROP. XVIII. THEOR.



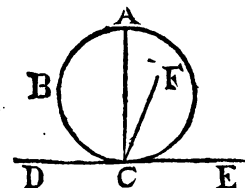
*Si recta linea AB cir-
culum CDE contingat; a
centro F autem ad conta-
ctum C recta linea FC
ducatur: ea perpendicu-
laris erit tangenti AB.*

Si enim non fit ita: du-
catur ex F ad AB ^a perpendicularis FDG. Quia ergo FGC rectus est, erit ^a ang. GCF minor recto, quare & $FG < FC$. Sed $FD = FC$: ergo $FG < FD$. Q. E. A.

E 4

PROP.

PROP. XIX. THEOR.

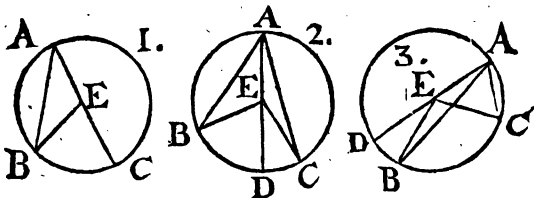


*Si recta linea DE circum-
culum ABC contingat, a
contactu autem C recta
linea CA ducatur ad an-
gulos rectos tangenti
DE: centrum circuli erit in eadem CA.*

δ. 18. 3.
ε. hyp.
ζ. 9. ax.

Si enim non: fit centrum in alia recta CF.
Erit ergo δ FCE rectus. Est autem & ACE
rectus ϵ . Q. E. A ζ .

PROP. XX. THEOR.



*In circulo ABC angulus BEC, qui ad cen-
trum E, duplus est eius BAC, qui ad circum-
ferentiam; quando circumferentiam eandem
BC habent pro basi.*

η. 5. 1.
θ. 32. 1.

Cas. 1. Si E cadit in AC. Quoniam $EA = EB$: erit ang. $BAC = \eta$ ABE, ideoque $2 BAC = BAC + ABE$. Sed ang. $BEC = \theta$ BAC + ABE. Ergo $BEC = 2 BAC$. Q. E. D.

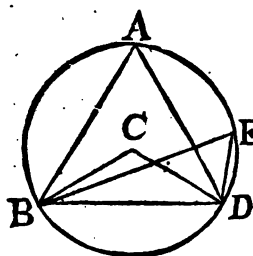
ι. cas. 1.
κ. 2. ax.

Cas. 2. Si E intra ang. BAC cadit. Iunga-
tur AED: & erit $BED = \iota$ BAD, & $DEC = \iota$ DAC; quare ang. $BEC = \kappa$ 2 BAC.
Q. E. D.

Cas.

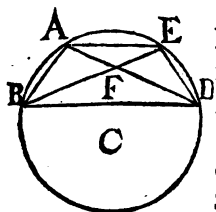
Caf. 3. Si E extra ang. BAC cadit: similiter ostenditur, esse ang. $BEC = \frac{1}{2} BAC$. *ax. 3.*
Q. E. D.

PROP. XXI. THEOR.



*Anguli BAD, BED
in eodem circuli segmento
BAED sunt inter se æ-
quales.*

Caf. 1. Si segmentum BAED fit semicirculo maius: fumatur μ circuli *ax. 1. 3.* centrum C, & iungantur CB, CD. Quia ergo ang. $BAD = \frac{1}{2} BCD$, *v. 26. 3.* & ang. $BED = \frac{1}{2} BCD$: erit $\angle BAD = \angle BED$. *ax. 7.* Q. E. D.

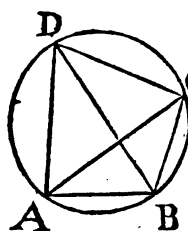


** Caf. 2.* Si segmentum BAED semicirculo maius non fit: iungatur AE. Et quia segmentum ABDE semicirculo maius erit: per *caf. 1.* erit angul. $ABE = ADE$.

Sed & ang. $BFA = EFD$. *ax. 15. 1.*

Subtractis ergo his angulis ab æqualibus *ax. 32. 1.* summis angulorum in triangulis ABF, EDF: remanebit ang. $BAD = BED$. Q. E. D.

PROP. XXII. THEOR.



Quadrilaterorum ADCB, quae circulis inscribuntur, Anguli oppositi ADC, ABC sunt duobus rectis aequales.

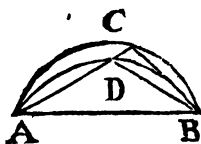
p. 21. 3.

c. 2. 22.

r. 32. L

Iungantur AC, BD. Quoniam \angle ang. $CAB = CDB$, & ang. $ACB = ADB$: erit \angle ang. $CAB + ACB = ADC$. Sed ang. $CAB + ACB + ABC = 2$ rectis. Ergo ang. $ADC + ABC = 2$ rectis. Similiter ostenditur, ang. $DAB + DCB = 2$ rectis. Q. E. D.

PROP. XXIII. THEOR.



Super eadem recta linea duo circularum segmenta similia & inaequalia ex eadem parte non constituentur.

v. 10. def. 3.

φ. 16. L

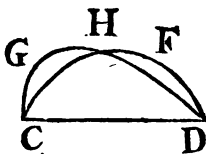
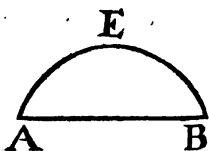
Si enim fieri potest, sint super recta AB duo segmenta circularum ACB, ADB inaequalia sed similia ex eadem parte constituta. Ducatur ADC, & iungantur CB, DB. Erit ergo \angle ang. $ADB = ACB$. Q. E. A ϕ .

PROP. XXIV. THEOR.

Super aequalibus rectis lineis AB, CD similia circularum segmenta ABE, CDF sunt inter se aequalia.

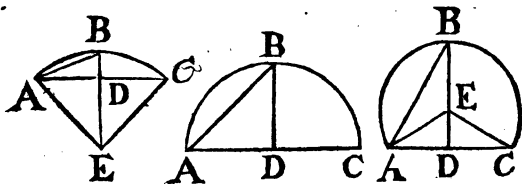
Ponatur enim segmentum ABE in segmentum CDF sic, ut A in C & AB in CD cadat.

Et



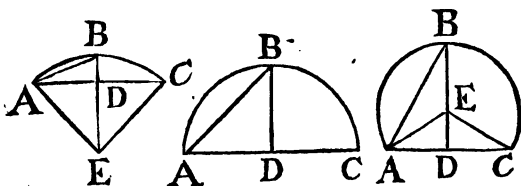
Et quia $AB = CD$, punctum B cadet in D. Iam si circumferentia AEB non congrueret circumferentiae CFD: aut extra hanc caderet, aut eam secaret, veluti CGHD. Atqui si circumferentia AEB extra vel intra segmentum CDF caderet: foret segmentum ABE segmento CDF maius minusue, & eidem simile. Quod fieri nequit \propto . Si circumferentia AFB caderet in CGHD: duo circuli se in pluribus quam duobus punctis C, H, D secarent; quod etiam absurdum est ψ . Quum ψ . 10. 3. ergo circumferentia AEB nec extra circumferentiam CFD cadat, nec eam secet: ipsi congruat necesse est. Congruent ergo tota segmenta ABE, CDF, & erunt proinde aequalia. Q. E. D.

PROP. XXV. PROBL.



Dato circuli segmento ABC describere circulum, cuius est segmentum.

Secetur



α. 10. 1.

α. 11. 1.

β. 23. 1.

Secetur a AC bifariam in D, & ipsi ex D ad rectos ducatur a DB, & iungatur AB. Et si ang. ABD = BAD: erit D centrum circuli, cuius est segmentum ACB. Sin ang. ABD maior vel minor angulo BAD; fiat β angul. BAE = ABD; & erit E centrum circuli, in teruallo EA, vel EB, vel EC describendi.

γ. 6. 1.

δ. constr.

ε. 9. 3.

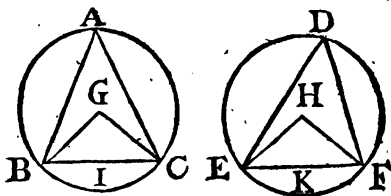
Cas. 1. Nam si ang. ABD = BAD: erit AD = γ DB. Sed & AD = δ DC. Quare D erit centrum circuli complendi ε . Q. E. F. Simul patet, hoc in casu segmentum ACB esse semicirculum.

ζ. 4. 1.

Cas. 2. Si ang. BAE aequalis est constitutus ang. ABD: erit iterum γ EB = EA. Sed ob AD = δ DC, & angulos ad D aequales, est etiam EA ζ = EC. Ergo ε circuli complendi centrum erit E. Q. E. F. Constat simul, si ang. ABD > BAD, segmentum ACB semicirculo minus esse, quoniam centrum E extra cadit; & si ang. ABD < BAD, segmentum ACB maius esse semicirculo, quoniam centrum E intra cadit.

PROP.

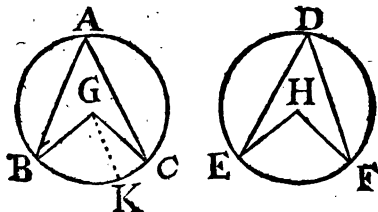
PROP. XXVI. THEOR.



In aequalibus circulis ABC, DEF, anguli aequales aequalibus insistant circumferentiis BIC, EKF, siue ad centra, (vt BGC, EHF) siue ad circumferentias (vt BAC, EDF) † insistant.

Iungantur enim BC, EF. Quia circuli ABC, EDF aequales sunt: erunt & quae ex centrīs aequales, id est, $GB = HE$, $GC = HF$. Et quia praeterea ang. $BGC = EHF$: erit $BC = EF$. Et quoniam ang. $BAC = EDF$: segmentum BCA simile est ^{¶. 4. 1.} segmentum EFD. ^{¶. 11. def. 3.} Ergo ^{¶. 24. 3.} segm. $BCA =$ segm. EFD . Totus autem circulus $ABG =$ circulo DEF . Ergo ^{¶. 3. ax.} segm. $BCI =$ segm. EKF , ideoque circumferentia $BIC = EKF$. Q. E. D.

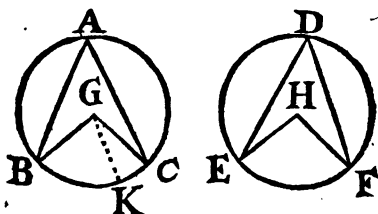
PROP. XXVII. THEOR.



In aequalibus circulis ABC, DEF, anguli,

† Supple, constituti.

qui

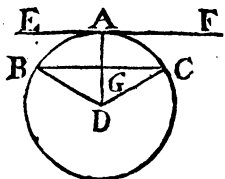


qui aequalibus insistant circumferentiis BC, EF, sunt inter se aequales siue ad centra, (vti BGC, EHF) siue ad circumferentias (vti BAC, EDF)† insistant.

Si enim non sit ang. $BGC = EHF$: alteruter veluti BGC maior erit. Fiat ang. BGK = \wedge EHF: & erit \wedge BK = EF = BC. Quod fieri nequit. Est ergo ang. $BGC = EHF$, & hinc etiam \wedge ang. $BAC = EDF$. Q. E. D.

λ. 23. 1.
μ. 26. 3.
ν. 9. ax.
ξ. 20. 3.
7. ax.

* Scholium.



Linea recta EF, quae ducta ex A medio puncto circumferentiae alicuius BAC circum tangit, parallela est rectae lineae BC, quae peripheriam illam subtendit.

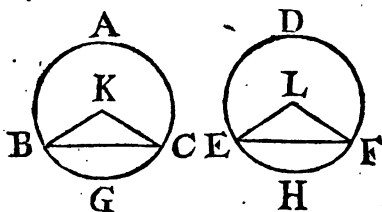
Duc e centro D ad contactum A rectam DGA, & connecte DB, DC. Latus DG commune est, & $DB = DC$, atque ang. $BDA = ADC$, ob π peripherias BA, AC aequales. Ergo \wedge ang. BGD = CGD, & proinde vterque rectus est. Sed interni anguli EAD, FAD etiam π recti sunt. Ergo EF, BC parallelae π sunt. Q. E. D.

σ. 27. 3.
π. hyp.
ρ. 4. 1.
σ. 18. 3.
τ. 28. 1.
10. ax.

† Supple, constituti.

PROP.

PROP. XXVIII. THEOR.



In aequalibus circulis ABC, DEF, aequales rectae lineae BC, EF circumferentias aequales auferunt, maiorem quidem BAC maiori EDF, minorem vero BGC minori EHF.

Sumantur centra K, L, & iungantur KB, KC, LE, LF. Quoniam circuli aequales sunt: erit $KB = LE$, & $KC = LF$. Basis vero $BC = EF$: ergo ang. $BKC = ELF$, & hinc $\angle BGC = EHF$. Sed & totae circumferentiae aequales sunt. Ergo & reliquae BAC, EDF aequantur. Q. E. D.

PROP. XXIX. THEOR.

In aequalibus circulis ABC, DEF, aequales circumferentias BGC, EHF aequales rectae lineae BC, EF subtendunt.

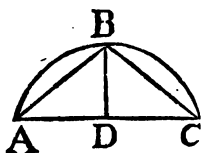
Quoniam $BGC = EHF$: ductis e centrīs KB, KC, LE, LF, erit $\angle BKC = \angle ELF$. Praeterea, quia circuli aequales ponuntur, est $KB = LE$, & $KC = LF$. Ergo $BC = EF$. Q. E. D.

* Nota. Haec & tres praecedentes intelligantur etiam de eodem circulo.

PROP.

PROP. XXX. PROBL.

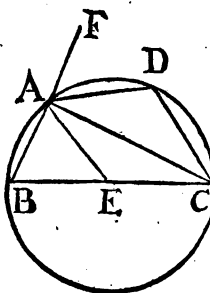
Datam circumferentiam ABC bifariam secare.



Duc AC, quam bifeca in D. Ex D duc DB perpendiculararem in AC. Dico, fore $AB = BC$. Iungantur enim AB, BC. Et quia $AD = DC$, & latus DB commune, α . 10. def. 1. & ang. $ADB = BDC$: erit α $AB = BC$, & ergo β circumferentia $AB =$ circumf. BC, quoniam vtraque semicirculo minor est. Q. E. F.

α . 10. def. 1.
 α . 4. 1.
 β . 28. 3.

PROP. XXXI. THEOR.



In circulo ABCD angulus BAC, qui in semicirculo, rectus est; qui vero ABC in maiori segmento, minor est recto; & qui ADC in minori, maior recto. Et insuper angulus maioris segmenti recto maior est; minoris vero segmenti angulus recto minor.

1. Ex centro E ducatur EA, & BA producat in F. Quoniam $BE = EA$: erit γ ang. $BAE = ABC$. Rursus quia $EA = EC$: erit γ ang. $BCA = CAE$. Ergo δ ang. $BAC = ABC + BCA$. Est autem & ang. $FAC = ABC + BCA$. Ergo ang. $BAC = FAC$. ϵ . 10. def. 1. Ergo ang. BAC ζ rectus est. Q. E. D.

γ . 5. 1.

δ . 2. 22.

ϵ . 32. 1.

2. Quo-

2. Quoniam \angle ang. $ABC + BAC < 2$ re-
ctis, & $BAC =$ recto: erit \angle ang. $ABC < 2$ re-
cto. Q. E. D.

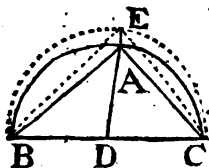
3. Quum quadrilaterum $ABCD$ in circulo
habeat \angle angulos oppositos ABC & ADC 2 re-
ctis aequales; ABC vero minor sit recto: re-
liquus ADC maior recto erit. Q. E. D.

4. Quia angulus rectilineus BAC rectus est:
patet, angulum a circumferentia CBA & re-
cta AC comprehensum maiorem recto esse.
Rursus quia FAC rectus est: patet, angulum
minoris segmenti DAC minorem esse recto.
Q. E. D.

Corollar. Hinc manifestum est, quod si unus an-
gulus trianguli duobus reliquis aequalis sit, est rectus.

* Scholia.

1. In triangulo rectangulo BAC
si hypotenusa BC bisecetur in
 D : circulus, intervallo DB de-
scriptus, per A etiam transibit.



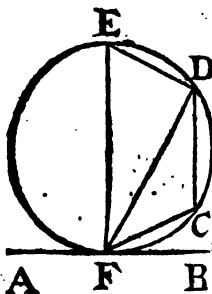
Si enim non transeat per A ,
ut BEC : iuncta DA , quae circulo occurrat ad E ,
ducantur EB , EC . Erit ergo \angle angulus BEC in
semicirculo rectus, & proinde \angle ang. BAC aequa-
lis. Q. E. N.

2. Si quis angulus in segmento circuli rectus est:
segmentum semicirculus est. Si vero obtusus est, seg-
mentum minus: sin acutus, segmentum maius est se-
micirculo. Si enim negas: angulus ille tantus non
erit, quantus ponebatur.

F

PROP.

Si recta linea AB circulum CDEF contingat, a contactu F autem ducatur recta linea FD, circulum secans: anguli DFB, DFA, quos haec cum contingente facit, aequales erunt iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt, DEF, DCF.



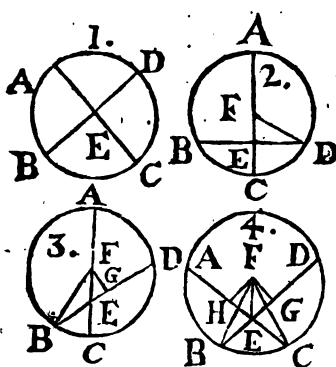
Ducatur enim ipsi AB ad rectos angulos FE; iungatur ED, & sumto quouis puncto C in circumferentia DF, iungantur CD, CF. Quoniam igitur in FE centrum circuli est:

v. 19. 3. EDF est angulus $\frac{1}{2}$ in semicirculo, & proin-
 z. 18. def. 1. & 7. def. 3. de ° rectus. Hinc ang. EFD + DEF = °
 o. 31. 3. recto. Sed & ang. EFB = recto. Quare °
 π. 32. 1. ang. DFB = DEF. Deinde quoniam DFA
 ϕ. 1. & 3. ax. + DFB = ° 2 rectis = ° DCF + DEF:
 σ. 13. 1. erit ang. DFA = ° DCF. Q. E. D.
 τ. 22. 3.
 υ. 3. ax.

Super data recta linea AB describere segmentum circuli, quod capiat angulum, dato angulo rectilineo C aequalem.

Caf. 1.

PROP. XXXV. THEOR.



*Si in circulo A
BCD duae rectae
lineae AC, BD sese
mutuo secant: re-
ctangulum sub se-
gmentis unius AE,
EC comprehensum
aequale est ei,
quod sub alterius
segmentis BE, ED
comprehenditur.*

Cas. 1. Si AC, BD per centrum E trans-
eunt: manifestum est, quum AE, EB, DE,
EC aequales sint, esse $AE \times EC = BE \times ED$. Q. E. D.

* *Cas. 2.* Si alterutra AC per centrum F
transit, & alteram BD ad angulos rectos secat
in E: iungatur FD. Est $\angle AE \times EC + FEq = FCq = FDq$. Sed quia $BE = ED$,
ideoque $BE \times ED = EDq$: est quoque $BE \times ED + FEq = FDq$. Ergo $AE \times EC = BE \times ED$ vel EDq .

* *Cas. 3.* Si alterutra AC per centrum F
quidem transit, sed alteram BD non ad rectos
secat: ex F in BD ducatur perpendicularis
FG. Est ergo $BG = GD$, & $BE \times ED + EGq = BGq$. Iungatur FB, & addito
communi FGq, erit $BE \times ED + EGq + FGq = FBq$. Sed $EGq + FGq = FEq$.
Ergo $BE \times ED + FEq = FBq = FCq$.

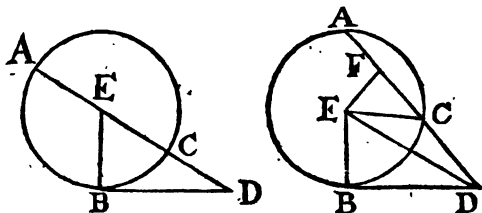
FCq. Est vero & $AE \times EC + FEq = FCq$

FCq. Ergo $AE \times EC = BE \times ED$.

Q. E. D.

Cas. 4. Si neutra per centrum F transit: iungantur FE, FB, FC, & ex F in AC, BD, demittantur perpendiculares FH, FG. Ostenditur, vti antea, $BE \times ED + FEq = FBq$, & $AE \times EC + FEq = FCq$. Est vero $FBq = FCq$. Ergo $AE \times EC = BE \times ED$. Q. E. D.

PROP. XXXVI. THEOR.

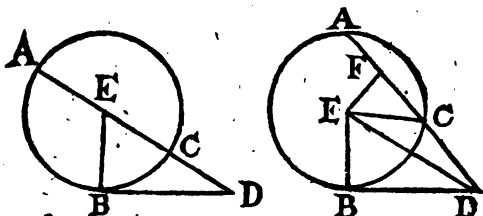


Si extra circulum ABC aliquod punctum D sumatur, & ab eo in circulum cadant duae rectae lineae, quarum altera DA circulum secet in C, A, altera DB vero contingat: rectangulum comprehensum sub tota secante DA, & exteriore segmento DC, inter punctum D & convexam circumferentiam, aequale erit ei, quod a contingente DB fit, quadrato.

Cas. 1. Si DA transit per centrum E circuli: iungatur EB, & ang. EBD erit ^{n. 18. 3.} rectus. Sed ^{l. 6. 2.} $AD \times DC + CEq = DEq$, & ^{m. 47. 1.} $DBq + BEq = DEq$. Ergo $AD \times DC + CEq = DBq + BEq$. Ergo, quum $CEq = BEq$, $AD \times DC = DBq$. Q. E. D.

F 3

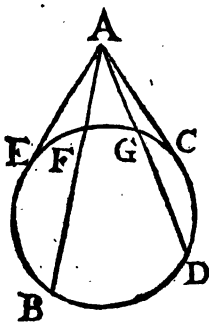
Cas. 2.



Caf. 2. Si DA non transit per centrum E in AD ex E ducatur perpendicularis EF, iunganturque EB, EC, ED. Ergo quum AC bisecta sit in F, erit $AD \times DC + FCq = FDq$. Commune addatur FEq: erit $AD \times DC + ECq = DEq$. Sed & $DBq + EBq = DEq$, & $CEq = EBq$: Ergo $AD \times DC = DBq$. Q. E. D.

v. 3. 3.
λ. 6. 2.
μ. 47. 1.

* *Scholium.*



ξ. 36. 3.

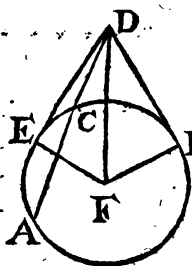
1. Si a puncto quouis A extra circum assumpto, plures rectae lineae AB, AD circum secantes ducantur: rectangula comprehensa sub totis lineis AB, AD, & partibus externis AF, AG inter se sunt aequalia. Nam si ducatur tangens AC: erit $BA \times AF = ACq = DA \times AG$.

2. Constat etiam, duas rectas AE, AC, ab eodem puncto A ductas, quae circum tangant, inter se aequales esse. Nam si ducatur AB secans circum: erit $AEq = BA \times AF = ACq$.

3. Perspicuum quoque est, ab eodem puncto A, extra circum assumpto, duci tantum posse duas lineas rectas AE, AC, quae circum tangant. Nam

Nam si tertia AG tangere dicatur, erit $AG = AC$. $Q. E. N.$ Sch. 2. 3.

PROP. XXXVII. THEOR.



Si extra circulum ABC sumatur aliquod punctum D, atque ab eo in circulum cadant duae rectae lineae DA, DB, quarum altera quidem DA circulum secet in C, altera vero DB in eum incidat; sit autem rectangulum comprehensum sub tota secante DA, & exteriori segmento DC inter punctum D & conuexam circumferentiam, aequale ei, quod ab incidente DB fit quadrato: incidens linea DB circulum continget.

Ducatur enim tangens circulum DE, sumatur centrum F, & jungantur FE, FB, FD. Ergo $AD \times DC = DE^2$. Ergo $DE^2 = DB^2$, & $DE = DB$. Sed quia praeterea $FE = FB$, & $DF = DF$: erit ang. DEF = DBF. Est vero DEF rectus, ergo & DBF; & igitur DB circulum tangit. $Q. E. D.$

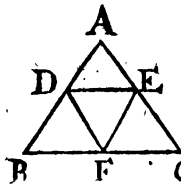
* Coroll. Hinc constat, si duae rectae aequales DE, DB ex puncto quopiam D in conuexam peripheriam incidunt, & eorum una DE circulum tangit: alteram quoque DB circulum tangere.

F 4

EV-

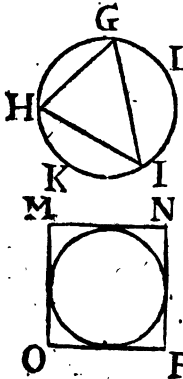
E V C L I D I S E L E M E N T O R V M L I B E R . I V .

DEFINITIONES.



1. *Figura rectilinea in figura rectilinea inscribi* dicitur, quando vnusquisque figurae inscriptae DEF angulus D, E, F, contingit vnumquodque latus AB, AC, BC eius ABC, in qua inscribitur.

2. *Figura similiter circa figuram circumscripti* dicitur, quando vnumquodque latus circumscriptae ABC contingit vnumquemque angulum eius DEF, circa quam circumscriptur.



3. *Figura rectilinea in circulo inscribi* dicitur, quando vnusquisque inscriptae figurae GHI angulus circuli GKL circumferentiam contingit.

4. *Figura rectilinea circa circulum circumscribi* dicitur, quando vnumquodque latus circumscriptae NMO P circuli circumferentiam contingit.

Cir-

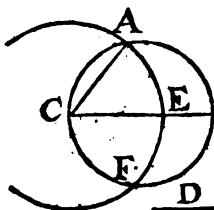
5. *Circulus* similiter *in figura rectilinea inscribi* dicitur, quando circuli circumferentia vnūquodque latus eius MNPO, in qua inscribitur, contingit.

6. *Circulus circa figuram rectilineam circumscribi* dicitur, quando circuli circumferentia GKL vnūquemque angulum eius GHI, circa quam circumscribitur, contingit.

7. *Recta linea GH in circulo GKL aptari* dicitur, quando eius termini G, H in circuli circumferentia fuerint.

PROP. I. PROBL.

In dato circulo ABC datae rectae lineae D, quae diametro eius BC maior non sit, aequalem rectam lineam aptare.



Ducatur circuli diameter BC. Et si $D = BC$: factum iam erit propositum *.

a. 7. def. 4.

Si $D < BC$, ponatur ipse $D = CE$, & centro G intervallo CE circulus AEF describatur, & CA iungatur. Quae erit ipse D aequalis γ , & in dato circulo aptata *. Q. E. F.

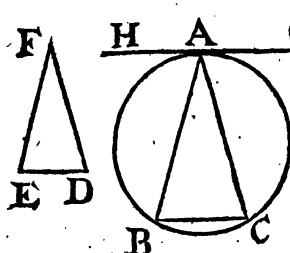
F 5

PROP.

PROP. II. PROBL.

In dato circulo ABC inscribere triangulum, aequiangulum dato triangulo DEF.

3. 23. 1.



Ducatur recta
linea HAG tan-
gens circum in
A, & fiat \angle an-
gulus $GAC =$
 DEF , ac angl.
 $HAB = EDF$,
& BC iungatur.

6. 32. 3.

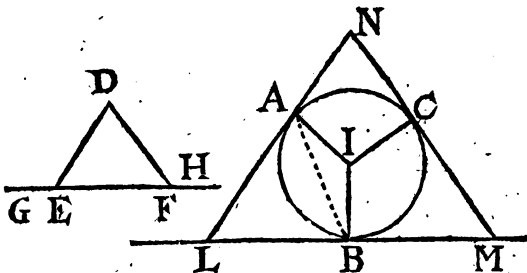
7. 1. ax.

11. 32. 1.

3. 3. def. 4.

Quoniam igitur \angle ang. $ABC = GAC$, &
ang. $ACB = HAB$: erit \angle ang. $ABC = DEF$,
& ang. $ACB = EDF$. Ergo & reliquus BAC
reliquo EFD aequalis erit; & $\triangle ABC$ ae-
quiangulum erit ipsi DEF , & in circulo \triangle in-
scriptum. Q. E. F.

PROP. III. PROBL.

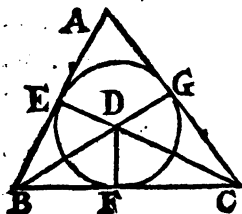


*Circa datum circum ABC circumscribere
triangulum, aequiangulum dato triangulo DEF.*
Produc

Produc latus EF ad G & H. Cape ¹ cen-¹. 1. 3.
trum circuli I, ex quo duc rectam IB vtcun-². 23. 1.
que, & fac³ ang. BIA = DEG, & ang. BIC
= DFH, & per A, B, C duc ⁴ rectas NL, ⁵ cor. 16. 3.
LM, NM, circulum tangentes. Dico factum.

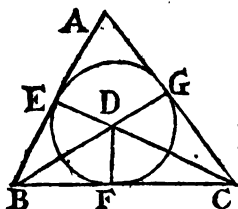
Quia enim ⁶ anguli ad puncta A, B, C recti⁷. 18. 3.
sunt: erunt ang. IAL + IBL = 2 rectis.
(* Ducta ergo AB, erunt ang. LAB + LBA
< 2 rectis, ideoque rectae NL, ML concu-
rent⁸ in L.) Quum autem in quadrilatero⁹. 21. 1.
LAIB quatuor anguli ¹⁰ sint = 4 rectis, e.g. 6. schol.
quibus anguli IAL, IBL = 2 rectis: erunt ¹¹. 32. 1.
& reliqui AIB + ALB = 2 rectis. Sunt ¹². 3. 21.
autem & ang. DEG + DEF = 2 rectis. ¹³. 13. 1.
Ergo ang. BIA + ALB = DEG + DEF.
Quare ¹⁴ ang. ALB = DEF. Similiter de-
monstrabitur, ang. NMB = DFE. Ergo &
reliquus MNL = ¹⁵ FDE. Est igitur Δ ¹⁶. 32. 1.
LMN aequiangulum dato DEF, & circum-
scriptum ¹⁷ circa circulum ABC. Q. E. F. ¹⁸. 4. def. 4.

PROP. IV. PROBL.



*In dato triangulo ABC
circulum inscribere.*

Bisecentur ¹ ang. ABC, ². 9. 1.
ACB rectis, quae conue-
niant in puncto D, ex
quo duc ³ perpendicular-⁴. 12. 1.
res



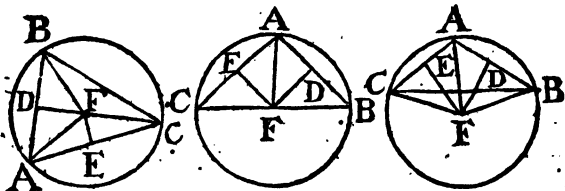
res DE, DF, DG. Circulus centro D per E, vel F, vel G descriptus, erit is, quem describere oportebat.

Q. 10. 22.
2. 26. 1.

ψ. 16. 3.
α. 5. def. 4.

Nam quum ang. $ABD = DBC$, & ang. $DEB = \phi DFB$, & latus DB commune: erit $\propto DE = DF$. Eadem ratione $DF = DG$. Circulus ergo ex D per E, vel F, vel G descriptus per reliqua etiam puncta transibit, & quia rectas AB, BC, CA secare nequit ψ , ipsas continget. Erit ergo inscriptus * in triangulo ABC. Q. E. F.

PROP. V. PROBL.



Circa datum triangulum ABC circulum circumscribere.

α. 10. 1.
β. 11. 1.

Biseca * AB, AC in D, E, & duc perpendiculares β DF, EF, coeuntes in F, ex quo centro per A, vel B, vel C describe circulum.

γ. 4. 1.

Siue enim F intra triangulum ABC, siue in basin BC, siue extra triangulum cadat: ductis rectis FA, FB, FC, erit $\gamma BF = AF = FC$. Ergo circulus ex F per vnum puncto-
rum

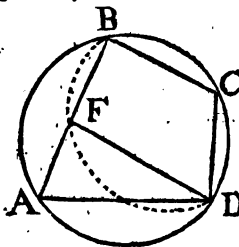
rum A, B, C descriptus, per reliqua etiam transibit, & circumscriptus erit circa ² triangulum ABC. Q. E. F. 2. 6. def. 4.

Corollar.

Si datum triangulum sit oxygenium, DF & EF intra triangulum conuenient ¹; sin amblygonium, ². 2. schol. extra; si vero rectangulum sit, conuenient in ter- ³. 3. tio latere BC, quod angulum rectum subtendit.

** Scholia.*

1. Eadem ratione circulus describitur per tria puncta, non in eadem recta existentia.

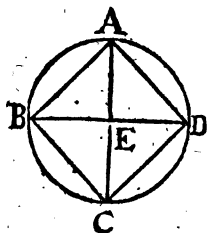


2. Si in quadrilatero A BCD anguli A & C, qui ex aduerso, duobus rectis aequantur, circa quadrilaterum circulus circumscribi potest. Describi enim per tres quosuis angulos B, C, D circulus potest. Iam si negas, eundem transi-

rum esse per quartum A: secet rectam AB in quouis alio puncto F. Dueta ergo DF, erit ang. C + ang. F = 2 rectis. Sed ponituretiam C + A = 2 rectis. Ergo ang. F = A. Q. E. A. ^{22. 3.} ^{16. 1.}

PROP. VI. PROBL.

In dato circulo ABCD quadratum inscribere.



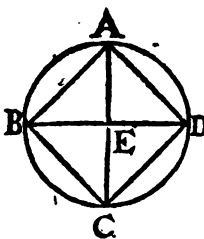
Ducantur ² diametri AEC, BED ad rectos angulos, & iungantur AB, BC, CD, DA. ^{9. 1. 3. & 11. 1.}

Nam quia BE = ED, & communis EA, & ang. BEA, AED

. 4. 1.

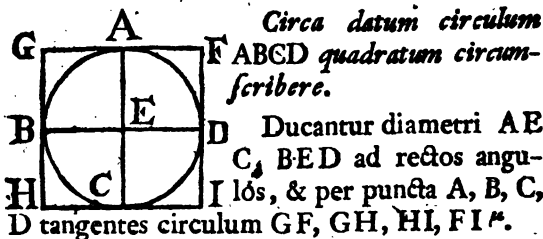
. 1. 2. 2x.

. 31. 3.



AED recti: erit $AB = DA$.
Eadem ratione $BC = AB$, &
 $CD = DA$. Ergo * quadrilaterum ABCD aequilaterum est. Est vero & rectangulum, quoniam \wedge quilibet angulorum A, B, C, D, in semicirculo est. Igitur quadratum est, inscriptum in dato circulo. Q. E. F.

PROP. VII. PROBL.



. cor. 16. 3.

. 18. 3.

. 28. 1.

. 34. 1.

Circa datum circum-
scribere.
Ducantur diametri AE
C, BED ad rectos angu-
lós, & per puncta A, B, C,
D tangentes circum GF, GH, HI, FI*.
Igitur quum \vee anguli ad A, B, C, D recti
sint, nec non (per hyp.) anguli ad E: erunt &
rectae FG, HI, BD, & rectae GH, FI, AC pa-
rallaelae. Ergo Pgra sunt GI, GC, FB, GE,
FE, HE & EI, ac propterea \circ $GF = HI$, &
 $GH = FI$, & $GH = AC$, & $GF = BD$.
Hinc ob $AC = BD$, erit quadrilaterum FG
HI aequilaterum. Et quoniam GE est Pgr.
& ang. AEB rectus: erit \circ & ang. G rectus.
Similiter reliqui H, I, F recti demonstrantur.
Ergo figura FGHI est quoque rectangula, &
propterea quadratum, ac circa circum de-
scripta. Q. E. F.

* Scholium

PROP. IX. PROBL.



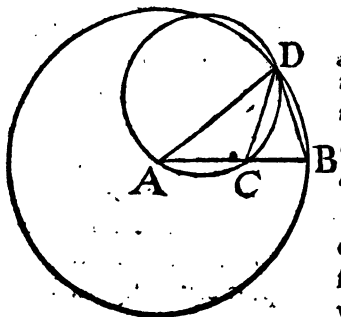
*Circa datum quadratum
ABCD. circulum circum-
scribere.*

Iungantur AC, BD. Ex puncto E, in quo se secant, interuallo EA vel EB, vel ED, vel EC describatur circulus.

Quoniam $DA = AB$, $DC = CB$ & communis AC: anguli A & C per rectam AC bifecantur ψ . Similiter ostenditur, angulos B & D bifecari per rectam BD. Et quia ang. $A = B$, & hinc dimidius $EAB =$ dimidio EBA : erit $EA = EB$. Similiter demonstrabimus, esse $EB = EC$, & $EC = ED$. Sunt ergo EA, EB, EC, ED inter se aequales, & circulus, centro E interuallo, vni harum aequali, descriptus, per puncta A, D, C, B transit, & ergo circa quadratum ABDC cir-

cumscriptus a est. Q. E. F.

PROP. X. PROBL.



*Isoceles trian-
gulum constitue-
re, habens alter-
utrum angulorum,
qui sunt ad basin,
duplum reliqui.*

Ponatur recta quaedam AB, & secetur B in C sic, vt $AB \times BC = ACq$.

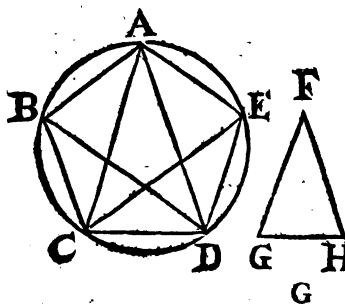
ACq. Centro A interuallo AB describatur circulus, in quo aptetur γ recta BD aequalis γ . 1. 4. ipsi AC, quae diametro circuli maior non est. Iuncta AD, erit DAB triangulum isosceles, in quo ang. BDA vel ABD = 2 DAB.

Nam circumscripto circulo δ circa $\triangle ACD$, δ . 5. 4. quoniam AB \times BC = ACq = BDq, patet ϵ . 37. 3. BD circulum ADC tangere, & propterea ζ 32. 3. ang. BDC = DAC. Hinc η ang. BDA = η . 2. ax. DAC + CDA = θ BCD. Sed quum sit ι . 15. def. 1. AB = AD, erit ang. BDA = κ CBD. Quare ang. BCD = λ CBD, & DC = μ BD = CA. Hinc ang. CDA = κ CAD, & additis ang. BDC = ν CAD: erit ang. BDA = 2 ν . per dem. DAB. Q. E. F.

* Scholium.

Quia ergo ang. DAB + ADB + ABD = 5 DAB = 2 rectis: liquet, esse ang. DAB quintam partem duorum rectorum.

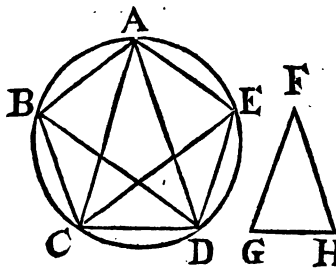
PROP. XI. PROBL.



In dato circulo ABCDE pentagonum aequilaterum & aequiangulum describere.

ξ Fiat triangulum FGH isosceles, habens alterutrum

s. 2. 4.



terutrum angu-
lorum ad basin
GH duplum re-
liqui F, & * in-
scribatur in cir-
culo ABCDE
triangulum AC
HD, triangulo FG

π. 9. 1.

H aequiangulum, ita vt angulo $F = DAC$,
 $G = ACD$, & $H = ADC$. Secetur * vter-
que ipforum ACD, ADC bifariam a rectis
CE, BD, & ducantur AB, BC, DE, EA:
dico factum.

g. 26. 3.

g. 29. 3.

Nam ex constructione liquet, quinque angu-
los ACE, ECD, DAC, BDC, BDA esse inter
se aequales. Hinc peripheriae & his subtensae
rectae AE, ED, DC, CB, BA sibi mutuo ae-
quantur. Aequilaterum ergo est pentago-
num ABCDE. Et quia peripheria AB =
per. DE, addita communi BCD, erit per.
ABCD = per. BCDE, ideoque * ang. AED
= BAE. De reliquis angulis similiter osten-
ditur, quod sint angulo BAE vel AED ae-
quales. Ergo & aequiangulum est pentago-
num ABCDE. Q. E. F.

π. 27. 3.

* Scholia.

1. Praxis facilior huius problematis tradetur ad

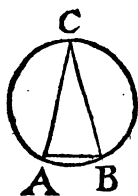
10. 13.

v. 27. 3.

2. Quoniam ang. $BAE = 3. CAD$ v: angulus
pentagoni aequilateri & aequianguli aequatur ϕ
tribus quintis duorum rectorum, vel sex quintis
recti.

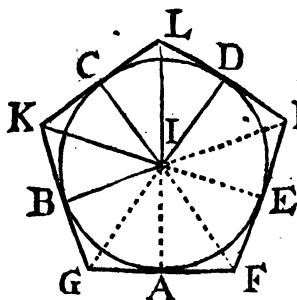
3. Vni-

3. Vniuersaliter figurae imparium laterum inscribuntur in circulis ope triangulorum isoscelium, quorum anguli aequales ad basin multiplices sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Parium vero laterum figurae in circulo inscribuntur ope isoscelium triangulorum, quorum anguli ad basin multiplices sesquialteri sunt eorum, qui ad verticem sunt angulorum.



Vt in triangulo isosceli CAB, si ang. $A = 3$ C $= B$: AB erit latus heptagoni. Si $A = 4$ C: erit AB latus enneagoni &c. Sin vero $A = 1\frac{1}{2}$ C: erit AB latus quadrati. Et si $A = 2\frac{1}{2}$ C: subtendet AB sextam partem circumferentiae. Pariterque si $A = 3\frac{1}{2}$ C: erit AB latus octogoni &c.

PROP. XII. PROBL.



*Circa datum
circulum ABC
DE pentagonum
Maequilaterum &
aequiangulum
circumscribere.*

Intelligantur
pentagoni in cir-
culo \propto descripti \propto n. 4.

angulorum puncta A, B, C, D, E, ita vt circumferentiae AB, BC, CD, DE, EA sint aequales; & per puncta A, B, C, D, E ducantur circuli contingentes FG, GK, KL, LM, MF. Erit FGKLM pentagonum desideratum.

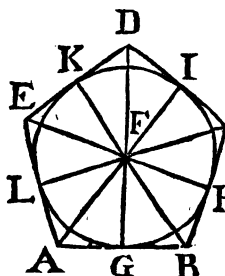
G₂

Sumto

* *Scholium.*

Eodem pacto, si in circulo quaecunque figura aequilatera & aequiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum ex centro ad angulos duarum excitentur lineae perpendiculares: hae perpendiculares constituent figuram totidem laterum & angulorum aequalium circulo circumscriptam.

PROP. XIII. PROBL.



In dato pentagono aequilatero & aequiangulo ABCDE circulum inscribere.

Duos pentagoni angulos A & B biseca^r rectis⁹. 9. 1. AF, BF, concurrentibus in F. A puncto F ad AB duc perpendicularem FG, & ex F intervallo⁶. 12. 1. FG describe circulum. Dico factum.

Ducantur in reliqua latera lineae perpendiculares FH, FI, FK, FL, & iungantur FC, FD, FE. Et quia $AB = BC$, & communis¹¹. hyp. FB, & ang. ABF = FBC: erit $\angle FAB = \angle FCB$. Ergo ang. EAB = $2 \angle FAB = 2 \angle FCB$. Sed ang. EAB = $\frac{1}{2}$ DCB. Ergo ang. DCB = $2 \angle FCB$. Recta ergo FC bisecat angulum DCB. Similiter ostendetur, reliquos angulos EDC, DEA etiam bisecari a rectis FD, FE. Et quia ang. FBG = FBH, item ang. FGB = FHB, & communis FB: est¹⁰. 26. 1. $FH = FG$. Eadem ratione reliquae FI, FK,

G 3

FK,

FK, FL ipsi FH vel FG aequales ostendentur. Ergo circulus centro F interuallo FG descriptus per H, I, K, L puncta transibit, & ibi latera pentagoni continget, quia illa secare nequit°. In dato igitur pentagono ABCDE circulus GHIKL inscriptus est. Q. E. F.

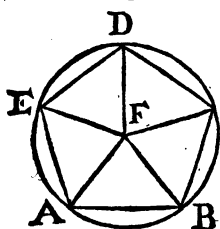
* *Coroll.*

Hinc si duo anguli proximi figurae aequilaterae & aequiangularae bisecentur, & a puncto, in quo coeunt lineae angulos bisecantes, ducantur rectae lineae ad reliquos figurae angulos: omnes anguli figurae erunt bisecti.

* *Schol.*

Eadem methodo in qualibet figura aequilatera & aequiangulara circulus describetur.

PROP. XIV. PROBL.



Circa datum pentagonum aequilaterum & aequiangularum ABCDE circulum circumscribere.

Duos pentagoni angulos A, B biseca rectis AF, BF, coeuntibus in F. Circulus centro F interuallo FA descriptus pentagono circumscriptus est.

Ductis enim FC, FD, FE, reliqui omnes anguli C, D, E bisecti erunt°. Et quoniam ang. EAB = ABC: erit ang. FAB = FBA. Ergo FB = FA. Similiter quaelibet FC, FD, FE ipsi FB vel FA aequalis ostendetur. Circulus

π. cor. 13. 4.

g. 7. 2x.

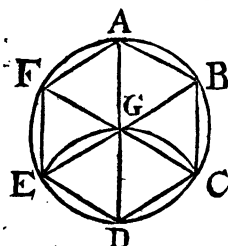
g. 6. 1.

Circulus ergo centro F interuallo FA descridtus per angulos pentagoni A, B, C, D, E transibit. Q. E. F.

* *Scholion.*

Eadem arte circa quamlibet figuram aequilateram & aequiangulam circulus circumscribetur.

PROP. XV. PROBL.



In dato circulo ABCD EF hexagonum aequilaterum & aequiangulum inscribere.

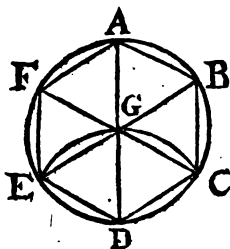
Ducatur circuli diameter AD, posito in G centro. Ex centro D inter-

teruallo DG describatur alius circulus EGC, iunctaeque EG, CG producantur in B & F; & iungantur AB, BC, CD, DE, EF, FA. Dico factum.

Nam quia in circulo AED est $GE = GD$, & in circulo EGC, $GD = DE$: erit $\triangle EGD$ aequilaterum, ideoque \sphericalangle aequiangulum. sch. 5. 1. Quare ang. EGD est tertia pars ϕ duorum rectorum. Similiter ang. DGC est tertia pars 2 rectorum. Et quoniam ang. EGD + DGC + CGB = \sphericalangle 2 rectis: erit & ang. CGB tertia pars 2 rectorum, & aequalis angulo EGD, & ang. DGC. Hinc ψ & anguli AGB, AGF, FGE & inter se & reliquis aequales erunt. Sex igitur \circ circumferentiae ED, DC, CB, BA, AF, FE inter se sunt aequales, ergo & \circ sex subtensae rectae. Quare

G 4

aequi-



A. 27. 3.

aequilaterum est hexagonum ABCDEF. Deinde quia circumf. $AF = ED$: communi addita AB CD : erit tota circumfer. $FABCD = ABCDE$, & proinde ang. $FED = AFE$. Similiter reliqui anguli hexagoni singillatim aequales ipsi FED , vel AFE ostenduntur. Ergo & aequiangulum est hexagonum ABCDEF, & dato circulo inscriptum. Q. E. F.

Corollar.

Ex hoc manifestum est, hexagoni latus circuli semidiametro aequale esse.

Circumscriptio hexagoni circa circulum, nec non circuli inscriptio vel circumscriptio in vel circa datum hexagonum eodem modo fiant, quem de pentagono docuimus.

** Scholia.*

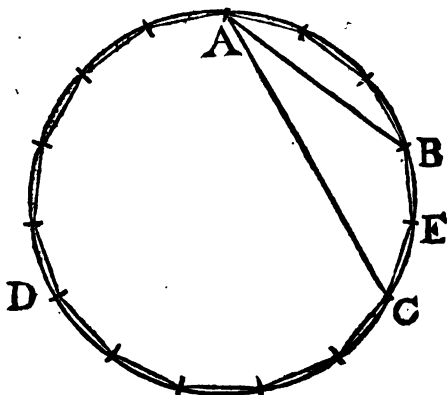
Hinc & facile triangulum aequilaterum ACE in dato circulo inscribetur.

Hexagonum autem regulare (i. e. aequilaterum & aequiangulum) super data recta CD ita construes. Fac super CD triangulum aequilaterum CGD. Centro G intervallo GC describe circulum. Is capiet hexagonum super data CD describendum.

PROP. XVI. PROBL.

In dato circulo ABCD quindecagonum aequilaterum & aequiangulum inscribere.

Inscri-



Inscribatur circulo trianguli aequilateri ipsi inscripti latus AC , item pentagoni aequilateri latus AB . Bifecetur BC in E . Iunctis rectis CE , EB aequales in continuum rectae circulo aptentur: erit in ipso quindecagonum aequilaterum & aequiangulum inscriptum. Nam qualium partium circulus $ABCD$ est quindecim, talium circumferentia ABC , tertia pars existens circuli, erit quinque. Circumferentia vero AB , quinta circuli pars, erit trium. Ergo reliqua BC est duarum, & huius dimidium BE vel EC est decima quinta pars circuli $ABCD$. Ergo si rectae EB aequales circulo in continuum aptentur: describetur quindecagonum aequilaterum & aequiangulum. Q. E. F.

Ad modum eorum, quae de pentagono dicta sunt, reliqua problemata de quindecagono soluentur.

* *Scholium.*

Circulus di- viditur geome- trice in par- tes	{	4, 8, 16, &c. per 6, 4. & 9, 1.
		3, 6, 12, &c. per 15, 4. & 9, 1.
		5, 10, 20, &c. per 11, 4. & 9, 1.
		15, 30, 60, &c. per 16, 4. & 9, 1.

Ceterum diuisio circumferentiae in partes quot-
uis aequales etiamnum desideratur. Quare pro
figurarum quarumcunque ordinarum vel regula-
rium constructionibus saepe ad mechanica artificia
recurrendum est, de quibus Geometrae practici
consulendi sunt.



EV-

E V C L I D I S

E L E M E N T O R V M

L I B E R V.

* * * * *

DEFINITIONES.

1. *Pars* est magnitudo *magnitudinis*, minor maioris, quando minor maiorem metitur.

2. *Multiplex* est maior minoris, quando minor maiorem metitur.

3. *Ratio* est duarum magnitudinum eiusdem generis, secundum quantiplicitatem mutua quaedam habitudo (seu relatio.)

4. *Rationem inter se magnitudines habere* dicuntur, quae multiplicatae se inuicem superare possunt.

* In omni ratione ea quantitas, quae ad aliam refertur, *antecedens* dicitur, haec altera *consequens*. Vt si A ad B refertur, siue magnitudines sint eae quantitates, siue numeri, ita vt consideres, quomodo A habeat se ad B quoad quantiplicitatem: antecedens est A, B vero consequens. Signum rationis magnitudinis A ad B est nobis hoc $A : B$.

5. *In eadem ratione magnitudines esse dicuntur prima ad secundam & tertia ad quartam*, quando primae & tertiae aequae multiplices secundae & quartae aequae multiplices, iuxta quamuis multiplicationem, vtraque vtramque, vel vna superant, vel vna aequales sunt, vel vna deficiunt, inter se comparatae.

6. Ma-

6. Magnitudines, quae eandem rationem habent, *proportionales* vocantur.

7. Quando autem aequè multiplicium multiplex primae superavit multiplicem secundae, multiplex autem tertiae non superauerit multiplicem quartae: tunc *prima ad secundam maiorem habere* dicitur *rationem*, quam *tertia ad quartam*.

8. *Proportio* est rationum similitudo.

* Signum, quo notamus proportionem, vel quod magnitudines A, B eandem rationem habeant, quam magnitudines C, D, est hoc $A : B = C : D$. Sed $A : B > C : D$ denotat, inter A & B maiorem quam inter C & D rationem esse. Similiter $C : D < A : B$ significat, rationem C ad D minorem esse ratione A : B.

9. Proportio in tribus ad minimum *terminis* consistit.

10. Si tres magnitudines sunt proportionales: prima ad tertiam *duplicatam* habere dicitur *rationem* eius, quam habet ad secundam.

11. Si quatuor magnitudines sunt proportionales: prima ad quartam *triplicatam* habere dicitur *rationem* eius, quam habet ad secundam. Et sic deinceps vno amplius, quamdiu proportio exstiterit.

* Talium proportionum, quae *continuae* appellantur, signum est $\div\div$. E. gr. $\div\div$ A, B, C notat, esse magnitudinem A ad B in eadem ratione, ac B ad C; & $\div\div$ A, B, C, D notat, rationes A : B, B : C, C : D easdem vel similes esse. Deinde si $\div\div$ A, B, C, hoc quod ratio A : C sit duplicata rationis

A :

A : **B**, sic exprimemus $A : C = (A : B)^2$. Et si **A**, **B**, **C**, **D** fuerint continue proportionales, rationem **A** ad **D** triplicatam esse rationis **A** ad **B**, sic significabimus $A : D = (A : B)^3$.

12. *Homologae magnitudines* dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

* Si $A : B = C : D$, vocatur **A** ipsi **C** homologa, item **B** & **D** homologae dicuntur.

13. *Alterna ratio* est sumtio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

14. *Inuerfa ratio* est sumtio consequentis, vt antecedentis, ad antecedentem, vt consequentem.

15. *Compositio rationis* est sumtio antecedentis vna cum consequente, tanquam vnius, ad ipsam consequentem.

16. *Diuisio rationis* est sumtio excessus, quo antecedens superat consequentem, ad ipsam consequentem.

17. *Conuerfio rationis* est sumtio antecedentis ad excessum, quo antecedens ipsam consequentem superat.

18. *Ex aequalitate ratio* est, quando pluribus existentibus magnitudinibus, & aliis, ipsis numero aequalibus, fuerit vt, in primis magnitudinibus, prima ad vltimam, sic in secundis magnitudinibus, prima ad vltimam. Vel aliter, sumtio extremarum per subtractionem mediarum.

19. Or-

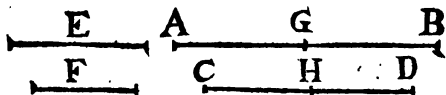
19. *Ordinata proportio* est, quando fuerit, vt antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; vt autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.

* Si fuerit $A : B = C : D$, & deinde sit $B : E = D : F$.

20. *Perturbata vero proportio* est, quando, tribus existentibus magnitudinibus, & aliis, ipsis numero aequalibus, fuerit, vt, in primis magnitudinibus, antecedens ad consequentem, ita, in secundis magnitudinibus, antecedens ad consequentem; vt autem, in primis magnitudinibus, consequens ad aliam quampiam, ita, in secundis magnitudinibus, alia quae-
piam ad antecedentem.

* Vt si sint magnitudines A, B, C, & totidem aliae D, E, F, & fuerit $A : B = E : F$; sit autem deinde $B : C = D : E$.

PROP. I. THEOR.

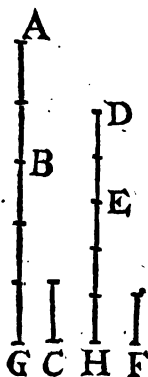


Si fuerint quocunque magnitudines AB, CD quocunque magnitudinum aequalium numero E, F, singulae singularum, aequae multiplices: quam multiplex est una magnitudo AB unius E, tam multiplices erunt & omnes AB + CD omnium E + F.

Quia enim AB aequae multiplex est ipsius E ac CD ipsius F: quot magnitudines sunt in
AB

A B ipsi E aequales, tot erunt & in C D ipsi F aequales. Sint partes, in quas A B diuidi potest, ipsi E aequales, A G, G B, & partes ipsius C D sint C H = H D = F. Ergo multitudo harum partium in A B aequalis erit multitudini in C D. Praeterea est $A G + C H = E + F$, & $G B + H D = E + F$. *α. 2. ax.* Ergo quot sunt in A B aequales ipsi E, tot sunt in A B + C D aequales ipsis E + F. Ergo quam multiplex est A B ipsius E, tam multiplices erunt & A B + C D ipsarum E + F. Q. E. D.

PROP. II. THEOR.

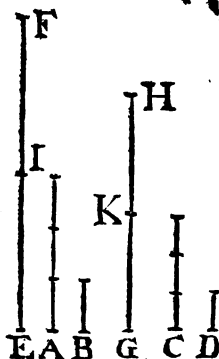


Si prima A B secundae C aeque multiplex fuerit, atque tertia D E quartae F; fuerit autem & quinta B G secundae C aeque multiplex, atque sexta E H quartae F: erunt etiam prima & quinta simul sumtae A G secundae C aeque multiplices, atque tertia & sexta D H quartae F.

Nam β quot in A B sunt β . hyp. magnitudines ipsi C aequales, tot sunt in D E aequales ipsi F. Et quot in B G sunt ipsi C aequales, tot sunt in E H ipsi F aequales. Ergo γ quot in A G sunt magnitudines ipsi C aequales, totidem D H continet *γ. 2. ax.*

tinet ipsi F aequales. Hinc A G aequemultiplex est ipsius C, ac D H ipsius F. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.



Si prima A secundae B aequemultiplex fuerit atque tertia C quartae D; sumantur autem EF, GH aequemultiples primae A & tertiae C: erit & ex aequo sumtarum utraque utriusque aequemultiplex, altera quidem EF secundae B, altera vero GH quartae D.

3. hyp.

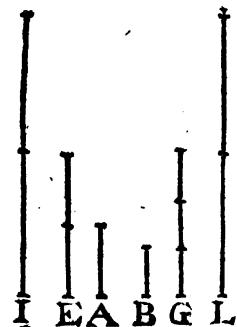
2. 5.

Sint enim in EF partes quotcunque EI, IF ipsi A aequales, & in GH partes GK, KH ipsi C aequales. Harum numerus illarum numero³ aequalis erit. Porro quia $EI = A$, & $GK = C$: erit EI ipsius B aequemultiplex³ ac GK ipsius D. Similiter IF ipsius B aequemultiplex erit, ac KH ipsius D. Ergo⁴ EF ipsius B aequemultiplex erit, ac GH ipsius D. Q. E. D.

PROP.

PROP. IV. THEOR.

Si prima A ad secundam B eandem habeat rationem, quam tertia C ad quartam D: & aequae multiplices E, F primae & tertiae ad aequae multiplices G, H secundae & quartae, iuxta quamvis multiplicationem, eandem rationem habebunt inter se comparatae.



Sumantur enim ipsarum E, F aequae multiplices I, K, & ipsarum G, H aequae multiplices L, M. Erit ergo ^{2. 3. 5.} I aequae multiplex ipsius A, ac K ipsius C.



Item L aequae multiplex ipsius B erit, ac M ipsius D. Et quum sit $A : B = C : D$: si I superat L, superabit & ^{4. 5. def. 5.} K ipsam M, si aequalis, aequalis, & si minor, minor erit. Sunt autem I, K ipsarum E, F aequae multiplices, & L, M ipsarum G, H aliae utcumque aequae multiplices ^{5.}. Ergo ^{9. hyp.} $E : G = F : H$. Q. E. D.

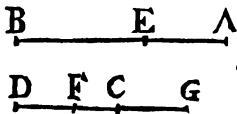
Cor. Quoniam demonstratum est, si fuerit $I >$ vel $=$ vel $<$ L, fore & $K >$, $=$, $<$ M: constat etiam, si $L >$, $=$, $<$ I, fore $M >$, $=$, $<$ K; ac propterea fore $G : E = H : F$. Si ergo quatuor magnitudines proportionales sunt, & inuerse proportionales erunt.

* *Schol.* Similiter demonstratur, esse $E : B = F : D$, item $A : G = C : H$.

H

PROP.

PROP. V. THEOR.


Si magnitudo AB magnitudinis CD aequae multiplex sit atque ablata AE ablatae CF: erit & reliqua EB reliquae FD aequae multiplex atque tota AB totius CD.

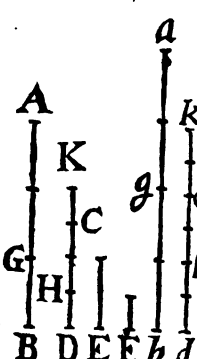
1. 5.

2. 7. ax.

3. ax.

Ponatur alia CG, cuius EB fit aequae multiplex ac AE est ipsius CF. Ergo AB ipsius GF erit aequae multiplex ac AE ipsius CF. Sed & AB ipsius CD aequae multiplex erat ac AE ipsius CF. Ergo AB ipsarum GF & CD aequae multiplex erit. Quare* est $GF = CD$, & ergo $CG = FD$. Ergo EB ipsius FD aequae multiplex est, quam AE ipsius CF, vel quam tota AB totius CD. Q.E.D.

PROP. VI. THEOR.

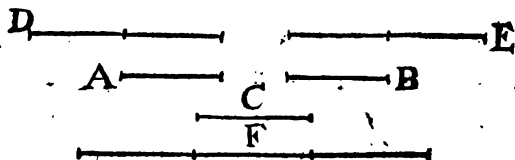

Si duae magnitudines AB, CD duarum magnitudinum E, F aequae multiplices sint; & ablatae quaedam AG, CH sint earundem E, F aequae multiplices: erunt & reliquae GB, HD vel iisdem E, F aequales, vel ipsarum E, F aequae multiplices.

Sit enim primum $GB = E$: dico, etiam fore $HD = F$. Ponatur enim ipsi F aequalis CK. Et quia AG, CH ipsarum E, F sunt aequae multiplices:

plices: erunt adhuc A B, K H ipsarum E, F
aeque multiplices. Sed & A B, C D earun-
dem E, F aequae multiplices erant. Ergo K H
& C D eiusdem F aequae multiplices erunt.
Quare $KH = CD$, & $KC = HD$. Sed $KC = F$. Ergo $HD = F$. μ . 6. ax.
 ν . 3. ax.

Similiter demonstrabimus, & si gb fuerit ξ . 2. ξ .
ipsius E multiplex, & hd ipsius F aequae mul-
tiplicem esse, posita ck ipsius F aequae multi-
plici, ac gb ipsius E. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.



*Aequales magnitudines A, B eandem habent
rationem ad eandem C; & eadem C ad aequa-
les A, B.*

Sumantur ipsarum A, B aequae multiplices
D, E, & ipsius C alia vtcunque multiplex F.
Et quoniam $A = B$: erit & $D = E$. Quare si
 $D >, =, < F$: erit * quoque $E >, =, < F$. a. 1. & 14. ax.
 π . 5. def. 5.
Ergo π erit $A : C = B : C$. Q. E. D.

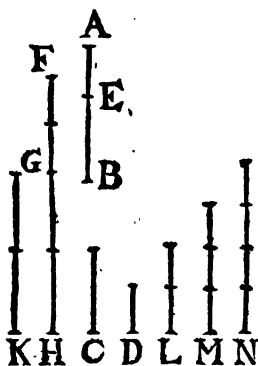
Similiter demonstratur, esse $C : A = C : B$.
Q. E. D.

* *Scholium.*

Eodem modo demonstrabis, aequalia ad ae-
qualia eandem rationem habere.

PROP. VIII. THEOR.

Inaequalium magnitudinum A B, C maior AB ad eandem D maiorem habet rationem, quam minor C. Et eadem D ad minorem C maiorem habet rationem, quam ad maiorem A B.



p. 4. def. 5.

Cas. 1. Sumta in AB ipsi C = BE, sit AE < EB. Capi potest

ipsius AE multiplex, maior quam D, quae sit FG. Et quantiplex FG est ipsius AE, tantiplex fiat GH ipsius EB, & K ipsius C. Sumantur etiam ipsius D dupla L, tripla M, & sic deinceps, quoad perueniatur ad primam multiplicium ipsius D, ipsa K maiorem. Sit ea N, quadrupla ipsius D. Quia ergo N prima est, qua K facta est minor: nondum erit K < M. Et quum FG, GH ipsarum AE, EB aequae multiplices sint: erunt & FH, FG ipsarum AB, AE aequae multiplices. Sunt vero FG & K ipsarum AE, C aequae multiplices. Ergo FH & K ipsarum AB & C aequae multiplices erunt. Sed quia GH & K aequalium EB & C aequae sunt multiplices; est GH = K. Ergo non est GH < M. Hinc, ob FG > D, erit GH + FG, id est FH, maior quam M + D, id est N. K autem, quum sit minor quam

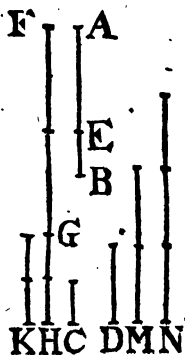
c. 1. 5.

r. 6. ax.

quam N, non superat ipsam N. Ergo $AB : D > C : D$. *v. 7. def. 5.*

Similiter ostenditur, esse $D : C > D : AB$.

Q. E. D.



Cas. 2. Si $AE > EB$. Sumatur ipseus EB multiplex $GH > D$, & quantiplex est GH ipseus EB, tantiplex fiat FG ipseus AE, & K ipseus C. Erunt ergo vt antea FH, K ipsarum AB, C aeque multiplices. Sit inter ipseus D multiplices N primo maior quam FG, M proxime praecedens. Ergo, quod rursus eodem modo ostendetur, FH

superabit ipsam N. Denique quum rursus sit $K = GH$, FG autem, quae ipsa GH maior est, non superet N: patet K non superare ipsam N. Ergo $AB : D > C : D$; &, quod pari modo demonstratur, $D : C > D : AB$. Q. E. D.

* *Cas. 3.* Si $AE = EB$, idem eodem modo demonstrari potest, quo in casu 1.

PROP. IX. THEOR.

Quae A, B, eandem rationem habent ad eandem C, sunt inter se aequales. Et ad quas A, B, eadem C eandem habet rationem, ipsae etiam sunt inter se aequales.

H 3

Si

φ. 8. 5.

1. Si enim non esset $A = B$; nec foret $A : C = B : C$. Quod est contra hypothesin. Ergo $A = B$. Q.E.D.

2. Si sit $C : A = C : B$, nec tamen $A = B$: non φ erit $C : A = C : B$; contra hypothesin. Ergo $A = B$. Q.E.D.

PROP. X. THEOR.

Magnitudinum A, B rationem habentium ad eandem C, quae maiorem habet rationem A, est maior. Ad quam vero B eadem C maiorem habet rationem, illa est minor.

κ. 7. 5.

ψ. 8. 5.

1. Sit $A : C > B : C$. Jam si non sit $A > B$: aut aequalis aut minor erit. Si esset $A = B$: foret $A : C = B : C$. Si $A < B$: foret $\psi A : C < B : C$. Vtrumque contra hypothesin. Ergo $A > B$. Q.E.D.

2. Sit $C : B > C : A$. Jam si non sit $B < A$: aut aequalis erit, aut maior. Si $B = A$: erit $\kappa C : B = C : A$. Si $B > A$: erit $\psi C : B < C : A$. Quia vtrumque contra hypothesin est: necesse est vt sit $B < A$. Q.E.D.

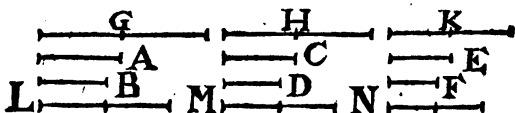
PROP. XI. THEOR.

Quae eadem sunt eadem rationes, & inter se sunt eadem.

Sit $A : B = C : D$, & $C : D = E : F$.
Dico

Dico fore $A:B=E:F$. Sumantur enim ipsarum A, C, E aequae multiplices G, H, K ; ipsarum vero B, D, F aequae multiplices L, M, N . Ergo si fuerit $G>,=,<L$: erit^a & $H>,=,<M$; item si fuerit $H>,=,<M$: erit & $K>,=,<N$. Quare si fuerit $G>,=,<L$: erit & $K>,=,<N$. Hinc erit^a $A:B=E:F$. Q. E. D.

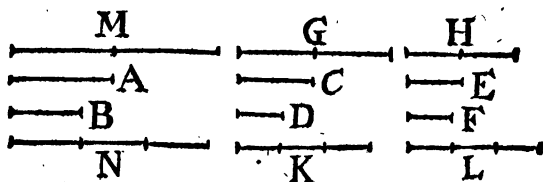
PROP. XII. THEOR.



Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint $A:B=C:D=E:F$: ut una A antecedentium ad unam B consequentium, ita erunt omnes antecedentes $A+C+E$ ad omnes consequentes $B+D+F$.

Sumantur ipsarum A, C, E aequae multiplices G, H, K , & ipsarum B, D, F aliae vtcunque aequae multiplices L, M, N . Jam^a si $G>,=,<L$: erit & $H>,=,<M$, atque $K>,=,<N$. Quare si $G>,=,<L$: erunt & $G+H+K>,=,<L+M+N$. Sunt autem G , & $G+H+K$ ipsarum A , & $A+C+E$ ^β aequae multiplices; item L ac $L+M+N$ sunt ipsarum B ac $B+D+F$ aequae multiplices. Ergo^a est $A:B=A+C+E:B+D+F$. Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.



Si prima A ad secundam B eandem habeat rationem, quam tertia C ad quartam D; tertia autem C ad quartam D maiorem habeat rationem, quam quinta E ad sextam F: & prima A ad secundam B maiorem habebit rationem, quam quinta E ad sextam F.

Sume ipsarum C, E aequae multiplices G, H, & ipsarum D, F alias quasdam aequae multiplices K, L, ita ut G quidem superet K, sed
 γ. 7. def. 5. H non superet L, quod semper fieri potest γ. Deinde quantiplex G est ipsius C, tantiplex fiat M ipsius A, & quantiplex K est ipsius D, tantiplex N ipsius B. Ergo quum sit $A : B = C : D$; si fuerit $G >, =, < K$: erit & $M >, =, < N$. Sed $G > K$. Ergo & $M > N$. Atqui H non $> L$. Sunt vero M & H ipsarum A & E aequemultiplices, nec non N & L ipsarum B, F, (per constr.). Ergo γ $A : B > E : F$. Q. E. D.

* Schol. Si vero fuerit $C : D < E : F$: erit quoque $A : B < E : F$. Item si $A : B > C : D > E : F$: erit $A : B > E : F$. Et si $A : B < C : D < E : F$: erit $A : B < E : F$.

PROP.

PROP. XIV. THEOR.

Si prima A ad secundam B eandem habeat rationem, quam tertia C ad quartam D; prima autem A maior sit quam tertia C: & secunda B quam quarta D maior erit. Et si aequalis: aequalis. Et si minor: minor.

1. Quia enim $A > C$: erit $A : B > C : B$. d. 8. 5.
Sed $A : B = C : D$. Ergo $C : D > C : B$. Er- 13. 5.
go $D < B$, vel $B > D$. Q. E. D. 2. 10. 5.

2. 3. Similiter demonstrabitur, si $A = C$, fore $B = D$, & si $A < C$, fore $B < D$. Q. E. D.

* *Schol.* A fortiori, si $A : B < C : D$, & $A > C$: erit $B > D$. Si fuerit $A = B$, & $A : B = C : D$: erit & $C = D$. Sumtis enim ipsarum A, B, C, D, aequae multiplicibus E, F, G, H: quia $E = F$, erit $G = H$, & proinde $C = D$. $\text{sch. praec. 9. 6. ax. 5. def. 5. 7. ax.}$

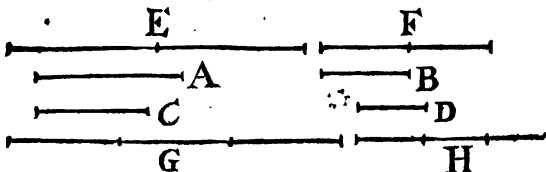
PROP. XV. THEOR.

Partes A, B inter se comparatae eandem habent rationem, quam habent eorum aequae multiplices C D, E F.

Sint CG, GH, HD partes multiplices CD ipsi A aequales, & EK, KL, LF partes multiplices EF ipsi B aequales. Erit ergo multitudo ipsarum CG, GH, HD aequalis multitudini ipsarum EK, KL, LF. Et quia $CG = GH = HD$, & $EK = KL = LF$: erit $CG : EK = GH : KL = HD : LF$. Quare $H 5$ re $\text{a. 7. 5. \& 11. 5.}$

μ . 12. 5. re μ $CG:EK=CD:EF$. Est vero $A:B=$
 ν . 7. 5. $CG:EK$. Ergo $A:B=\frac{2}{3}CD:EF$. Q.E.D.
 ξ . 11. 5.

PROP. XVI. THEOR.



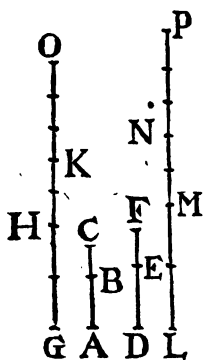
Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, $A:B=C:D$: & alterne proportionales erunt $A:C=B:D$.

Sint ipsarum A, B aequae multiplices E, F, &
 ipfarum C, D aliae aequae multiplices G, H.
 θ . 15. 5. Hinc $A:B=\circ E:F$. Sed $A:B=C:D$ (*byp.*)
 π . 11. 5. Ergo $\pi C:D=E:F$. Rursus $C:D=\circ G:H$;
 hinc $\pi E:F=G:H$. Quare si $E>, =, < G$:
 θ . 14. 5. erit θ & $F>, =, < H$. Ergo $A:C=\sigma B:D$.
 σ . 5. def. 5. Q. E. D.

* *Schol.* Haec propositio & 14. locum tantum habent, si magnitudines proportionales eiusdem generis sunt. Ceterum ex hac demonstrare possumus, si fit $A:B=C:D$, & $A><B$, esse & $C><D$. Nam sumtis ipsarum A, B, C, D aequae multiplicibus E, F, G, H: quia $\circ A:B=E:F$, &
 τ . 16. 5. ergo $\tau A:E=B:F$, & $A><B$; erit $E><F$. Hinc & $\sigma G><H$. Sed quum sit $\circ G:H=C:D$, & ergo $\tau G:C=H:D$: erit $\theta C><D$. Q. E. D.

PROP.

PROP. XVII. THEOR.



*Si compositae magnitudines
sint proportionales (AC: BC
= DE: EF): & diuisae pro-
portionales erunt (AB: BC
= DE: EF).*

Sumantur enim ipsarum
quidem AB, BC, DE, EF
aeque multiples GH, HK,
LM, MN, ipsarum vero BC,
EF aliae vtcunque aequae
multiplices KO, NP. Tota

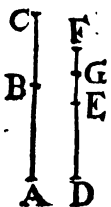
KG totius AC tam multiplex^{us} est, quam HG^{us} 1. 5.
ipsum AB, vel LM ipsum DE. Sed quam
multiplex est LM ipsum DE, tam multiplex
est^{us} LN ipsum DF. Ergo GK & LN ipso-
rum AC, DF aequae sunt multiples. Rur-
sus^{us} HK + KO id est HO, & MN + NP^{us} 2. 5.
id est MP, aequae multiples erunt ipsarum
BC, EF. Est vero AC: BC = DF: EF.
Ergo si GK >, =, < HO; erit quoque
LN >, =, < MP. Si vero GK >, =, <
HO: erit &, communi HK ablata, adhuc
GH >, =, < KO; Et si LN >, =, < MP;
erit, communi MN ablata, adhuc LM >,
=, < NP. Ergo si GH >, =, < KO: erit
& LM >, =, < NP. Quare^{us} AB: BC =^{us} 5. def. 5.
DE: EF. Q. E. D.

PROP.

PROP. XVIII. THEOR.

Si diuisae magnitudines sint proportionales
 $(AB:BC=DE:EF)$: & *compositae propor-*
tionales erunt $(AC:BC=DF:EF)$.

ψ. 17. 5.
 α. 11. 5.
 α. 14. 5.



Si negas: erit AC ad BC vt DF
 ad aliam FG ipsa FE minorem vel
 maiorem. Sit primo $FG < FE$. Sed
 quum sit ψ $AB:BC=DG:FG$
 = α $DE:EF$, & $DG > DE$: erit α
 $FG > FE$. Q. E. A. Similiter nec
 potest esse AC ad BC vt DF ad ma-
 iorem quam FE. Ergo $AC:BC=DF:FE$.
 Q. E. D.

PROP. XIX. THEOR.



β. 16. 5.
 γ. 17. 5.

Si fuerit vt tota AB ad totam CD,
ita ablata AE ad ablatam CF: erit
reliqua EB ad reliquam FD, vt tota
AB ad totam CD.

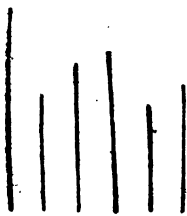
Nam quia $AB:CD=AE:CF$:
 A C erit alterne β $AB:AE=CD:CF$, &
 diuidendo γ $BE:EA=DF:FC$, & rursus
 alterne $BE:DF=EA:FC=AB:CD$. Q.
 E. D.

Corollar.

Quoniam ostensum est, si fuerit $AB:AE$
 3. 17. def. 5. $=CD:FC$, fore $AB:CD=BE:DF$: erit
 alterne $AB:BE=CD:DF$. Hinc δ si com-
 positae magnitudines proportionales fuerint, con-
 uertendo etiam proportionales erunt.

PROP.

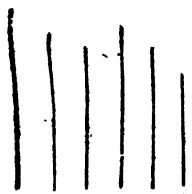
PROP. XX. THEOR.



Si sint tres magnitudines A, B, C & aliae ipsis numero aequales D, E, F, quae binae sumantur in eadem ratione ($A : B = D : E$, & $B : C = E : F$); ex aequo autem prima A maior sit quam tertia C: & quarta D quam sexta F maior erit; & si aequalis, aequalis; & si minor, minor.

Quum enim $A > C$: erit $A : B >^1 C : B$. Sed ^{1. 8. 5.} (hyp.) $A : B = D : E$, atque $C : B =^2 F : E$. Ergo ^{2. hyp. & cor. 4. 5.} $D : E >^3 F : E$. Ergo $D >^4 F$. Similiter ^{4. 13. 5.} ostenditur, si $A =$, $< C$, fore $D =$, $< F$. ^{5. 10. 5.} Q. E. D.

PROP. XXI. THEOR.



Si sint tres magnitudines A, B, C, & aliae ipsis numero aequales D, E, F, quae binae sumantur, & in eadem ratione; sit autem perturbata earum proportio ($A : B = E : F$, & $B : C = D : E$), & ex aequo prima A maior sit quam tertia C: & quarta D quam sexta F maior erit; & si aequalis, aequalis; & si minor, minor.

Quia $A > C$: est $A : B >^1 C : B$. Sed est $A : B = E : F$, & inuertendo $C : B = E : D$. Ergo ^{1. 8. 5.} $E : F > E : D$. Ergo ^{2. 13. 5.} $F < D$, vel $D > F$. ^{3. 10. 5.} Similiter ostenditur, si $A =$, $< C$, fore $D =$, $< F$. Q. E. D.

PROP.

PROP. XXII. THEOR.



Si sint quotcunque magnitudines A, B, C, & aliae ipsis numero aequales D, E, F, quae binae sumantur, in eadem ratione ($A : B = D : E$, & $B : C = E : F$): *& ex aequo in eadem ratione erunt* ($A : C = D : F$).

Sumantur G, H ipsarum A, D aequae multiplices, & K, L ipsarum B, E aliae vtcunque aequae multiplices, nec non M, N ipsarum C, F. Ergo $G : K = H : L$, & $K : M = L : N$.

Quare si sit $G >, =, < M$, erit

μ. 4. 5.

ν. 20. 5.

ξ. 5. def. 5.

& $H >, =, < N$. Ergo $A : C = D : F$.
Q. E. D.

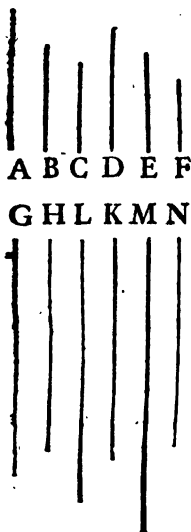
* Schol.

1. Ergo rationum aequalium duplicatae, triplicatae &c. etiam aequales sunt.

2. Et vice versa, quarum rationum duplicatae, vel triplicatae &c. aequales sunt, eae inter se aequales sunt. Sint e. gr. $\div \div a, b, c, d$, & $\div \div e, f, g, h$, & sit $a : d = e : h$: erit $a : b = e : f$. Si negas: sit $a : b = e : p$, & $p > f$, & pone $\div \div e, p, s, t$. Igitur quia $e : p < e : f$, erit $p : s < f : g$, & $s : t < g : h$, ideoque $s > g$, & $t > h$ (sch. 14. 5). Sed quia $a : d = e : t$, (per sch. 1.) & $a : d = e : h$: erit quoque $t = h$. Q. E. A.

PROP.

PROP. XXIII. THEOR.

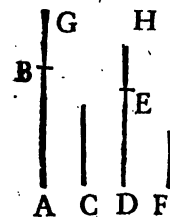


Si sint tres magnitudines A, B, C, & aliae ipsis numero aequales D, E, F, quae binae sumantur, in eadem ratione, sit autem perturbata earum proportio ($A : B = E : F$, & $B : C = D : E$): *& ex aequo in eadem ratione erunt* ($A : C = D : F$).

Sumtis G, H, K, ipsarum A, B, D aequae multiplicibus, & aliis L, M, N ipsarum C, E, F ut-
cunque aequae multiplicibus, erit $A : B = G : H$, & $E : F = M : N$. Sed ponitur $A : B = E : F$. Ergo $G : H = M : N$. Et quia $B : C = D :$

E : erit $H : L = K : M$. Quare si $G >$, $=$, $<$ L : erit & $K >$, $=$, $<$ N , & propterea $A : C = D : F$. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.



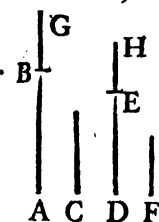
Si prima AB ad secundam C eandem habeat rationem, quam tertia DE ad quartam F; habeat autem & quinta BG ad secundam C eandem rationem, quam sexta EH ad quartam F: & composita e prima & quinta AG ad secundam C eandem rationem habebit, quam composita e tertia & sexta DH ad quartam F.

Quum

v. cor. 4. 5.

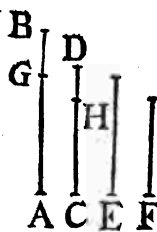
φ. 22. 5.

x. 18. 5.



Quum enim $BG : C = EH : F$: erit inuertendo $C : BG = F : EH$. Et quia $AB : C = DE : F$: erit ex aequo ϕ $AB : BG = DE : EH$; ergo componendo x $AG : GB = DH : HE$. Hinc quum praeterea sit $GB : C = HE : F$, erit ex aequo ϕ $AG : C = DH : F$. Q. E. D.

PROP. XXV. THEOR.



Si quatuor magnitudines fuerint proportionales ($AB : CD = E : F$): maxima ipsarum AB, & minima F duabus reliquis CD + E maiores erunt.

ψ. hyp.

θ. 7. 5.

α. 19. 5.

β. sch. 14. 5.

γ. 2. ax.

δ. 4. ax.

Fiat enim $AG = E$, & $CH = F$. Quoniam ergo $AB : CD = E : F = AG : CH$: erit $GB : HD = AG : CD$. Sed $AB > CD$. Ergo $GB > HD$. Quare, quia $AG + F = CH + E$: erit δ $AG + GB + F > CH + HD + E$, id est, $AB + F > CD + E$. Q. E. D.

* Quae sequuntur propositiones non sunt Euclidis, sed ex aliis desumptae. Ob frequentem tamen earum usum eas Euclideis subiungere, Isaacum Barrow secuti, voluimus.

* PROP. XXVI. THEOR.

A ——— C ——— Si prima ad secundam
B ——— D ——— habuerit maiorem ratio-
E ——— nem, quam tertia ad
quartam: habebit inuertendo, secunda ad primam
minorem rationem, quam quarta ad tertiam.

Sic

Sit $A : B > C : D$. Dico $B : A < D : C$. Nam
 concipe $C : D = E : B$. Ergo $A : B > E : B$;
 quare $A > E$; ergo $B : A < B : E$ vel $D : C$.
 Q. E. D.

13. 5.
 2. 10. 5.
 7. 8. 5.
 9. cor. 4. 5.

* PROP. XXVII. THEOR.

A ——— B ——— Si prima ad secundam
 C ——— D ——— habuerit maiorem ratio-
 nem, quam tertia ad quar-
 tam: habebit quoque vicissim prima ad tertiam ma-
 iorem rationem, quam secunda ad quartam.

Sit $A : B > C : D$. Dico $A : C > B : D$. Nam
 puta $E : B = C : D$; ergo $A > E$. Ergo $A : C$
 $> E : C$ vel $B : D$. Q. E. D.

10. 5.
 8. 5.
 16. 5.

* PROP. XXVIII. THEOR.

Si prima ad secundam habuerit maiorem rationem,
 quam tertia ad quartam: habebit quoque composita
 prima cum secunda ad secundam maiorem rationem,
 quam composita tertia cum quarta ad quartam.



Sit $AB : BC > DE : EF$. Dico $AC : BC >$
 $DF : EF$. Nam cogita $GB : BC = DE : EF$.
 Ergo $AB > GB$; adde vtrunque BC , erit AC
 $> GC$, ergo $AC : BC > GC : BC$ id est DF
 EF . Q. E. D.

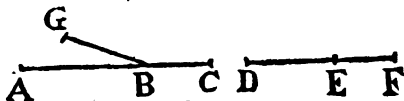
10. 5.
 4. 20.
 8. 5.
 18. 5.

* PROP. XXIX. THEOR.

Si composita prima cum secunda ad secundam ma-
 iorem habuerit rationem, quam composita tertia cum
 quarta ad quartam: habebit quoque diuidendo pri-
 ma ad secundam maiorem rationem, quam tertia ad
 quartam.

I

Sic



π. 10. 5.
 ρ. 5. 2X.
 σ. 8. 5.
 τ. 17. 5.

Sit $AC:BC > DF:EF$: dico $AB:BC > DE:EF$. Intellige $GC:BC = DF:EF$. Ergo $^{\tau}AC > GC$. Aufer communem BC : erit $^{\tau}AB > GB$. Ergo $AB:BC > ^{\sigma}GB:BC$, vel $^{\tau}DE:EF$. Q. E. D.

* PROP. XXX. THEOR.

Si composita prima cum secunda ad secundam habuerit maiorem rationem quam composita tertia cum quarta ad quartam: habebit per conuersionem rationis prima cum secunda ad primam minorem rationem, quam tertia cum quarta ad tertiam.

υ. hyp.

φ. 29. 5.

χ. 26. 5.

ψ. 28. 5.

Sit $AC:BC > DF:EF$: dico $AC:AB < DF:DE$. Nam quia $^{\nu}AC:BC > DF:EF$: erit diuidendo $AB:BC > ^{\phi}DE:EF$; inuertendo igitur $^{\chi}BC:AB < EF:DE$, ergo componendo $AC:AB < ^{\psi}DF:DE$. Q. E. D.

* PROP. XXXI. THEOR.

Si sint tres magnitudines A, B, C, & aliae ipsis aequales numero D, E, F; sitque maior ratio primae priorum ad secundam, quam primae posteriorum ad secundam ($A:B > D:E$), item secundae priorum ad tertiam maior, quam secundae posteriorum ad tertiam ($B:C > E:F$): erit quoque ex aequo maior ratio primae priorum ad tertiam, quam primae posteriorum ad tertiam ($A:C > D:F$).

ω. 10. 5.

α. 8. 5.

Concipe $G:C = E:F$. Ergo $^{\omega}B > G$, ergo $^{\alpha}A:G > A:B$. Rursus puta $H:G = D:E$: er-
 go

go^β H: G < A: B, & fortius γ H: G < A: G. β. 13. 5.
Quare * A > H. Proinde A: C > *H: C vel δ γ. sch. 13. 5.
D: F. Q. E. D. δ. 22. 5.

* PROP. XXXII. THEOR.

A ————— D —————
B ————— E —————
C ————— F —————
G —————
H —————

Si sint tres magnitudines A, B, C, & aliae ipsi numero aequales D, E, F; sitque maior ratio primae priorum ad secundum, quam secundae posteriorum ad tertiam (A: B > E: F), item secundae priorum ad tertiam, quam primae posteriorum ad secundam (B: C > D: E): erit quoque ex aequo maior ratio primae priorum ad tertiam, quam primae posteriorum ad tertiam (A: C > D: F).

Huiusce demonstratio plane similis est demonstrationi praecedentis.

* PROP. XXXIII. THEOR.

A ——— E ——— B
C ——— F ——— D

Si fuerit maior ratio totius AB ad totum CD, quam ablati AE ad ablatum CF: erit & reliqui EB ad reliquum FD maior ratio, quam totius AB ad totum CD.

Quoniam AB: CD > AE: CF: erit * permutando AB: AE > CD: CF; ergo conuertendo 22. 30. 5.
AB: EB < CD: DF, permutando igitur AB: CD < EB: DF. Q. E. D.

* PROP. XXXIV. THEOR.

Si sint quotcunque magnitudines, & aliae ipsi aequales numero, sitque maior ratio primae priorum ad

I 2

ad primam posteriorum, quam secundae ad secundam, & haec maior, quam tertiae ad tertiam, & sic deinceps: habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul maiorem rationem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam quam ultima priorum ad ultimam posteriorum.

Horum demonstratio est penes interpretes, quos adeat, qui eam desiderat. Nos omisimus, breuitatis studio, & quia eorum nullus usus in his elementis.



E V C L I D I S

E L E M E N T O R V M

L I B E R V I.

* * * * *

DEFINITIONES.

1. *Similes figurae rectilineae* sunt, quae & singulos angulos singulis aequales habent, & circa aequales angulos latera proportionalia.

* Nota similitudinis est haec \sphericalangle .

2. *Reciprocae figurae* sunt, quando in vtraque figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.

3. *Secundum extremam & mediam rationem recta linea secta* esse dicitur, quando ut tota ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus se habuerit.

4. *Altitudo cuiusque figurae* est linea perpendicularis a vertice ad basin ducta.

5. *Ratio ex rationibus componi* dicitur, quando rationum quantitates inter se multiplicatae illius faciunt quantitatem.

* Signum quantitatis rationis $A : B$ est $\frac{B}{A}$, scilicet signum quoti, qui indicat, quoties antecedens contineat consequentem vel aliquotam eius partem. Iam quia rationum $A : B$ & $B : C$ quantitates $\frac{A}{B}$ & $\frac{B}{C}$ inter se multiplicatae faciunt $\frac{A}{C}$, quae quantitas est rationis $A : C$: dicimus rationem $A : C$ componi ex rationibus $A : B$ & $B : C$, quod sic scribimus. $(A : C) = (A : B) + (B : C)$.

I 3

PROP.

PROP. I. THEOR.

Triangula ABC, ACD, & parallelogramma EC, CF, quae eandem habent altitudinem, sunt inter se ut bases BC, CD.



α. 38. 1.

1. In BD producta sumantur $BG = GH = BC$, & $DK = KL = CD$, & iungantur AH, AG, AK, AL. Ergo $\Delta ABG = \Delta AGH = \Delta ABC$, & sunt proinde basis HC & ΔACH basis BC & trianguli ABC aequae multiplicia. Similiter patet esse basin CL & ΔACL basis CD & ΔACD aequae multiplicia. Iam si $HC >, =, < CL$: erit $\Delta ACH >, =, < \Delta ACL$. Ergo $BC : CD = \Delta ABC : \Delta ACD$. Q. E. D.

γ. 41. 1.

δ. 15. 5.

ε. 11. 5.

2. Quia Pgra. EC: CF sunt dupla γ Δ rum ABC, ACD, & hinc δ $EC : CF = \Delta ABC : \Delta ACD$: erit ϵ $EC : CF = BC : CD$. Q. E. D.

* Schol.



Hinc triangula ABC, DEF, & pgra. GC, HF, quorum aequales sunt bases BC, EF, ita se habent ut altitudines AI, DK.

ζ. 1. 6.

η. 38. 1.

θ. 7. & 11. 5.

ι. 15. 5.

Sume $IL = CB$, & $KM = FE$, ac iunge LA, MD. Quia ergo $IL = KM$: erit ζ $\Delta ALI : \Delta DMK = AI : DK$. Sed $\Delta ALI = \eta$ ΔABC , & $\Delta DMK = \Delta DEF$. Ergo $\Delta ABC : \Delta DEF = \delta$ $AI : DK = \epsilon$ Pgra. GC: Pgra. HF. Q. E. D.

PROP.

PROP. II. THEOR.

Si uni laterum BC trianguli ABC parallela recta linea DE ducatur: haec proportionaliter secabit ipsius trianguli latera AB, AC. Et si trianguli ABC latera AB, AC proportionaliter secata fuerint: quae sectiones coniungit recta linea DE reliquo trianguli lateri BC parallela erit.

1. Sit DE ad BC parallela: dico fore BD: DA = CE: EA. Iungantur enim DC, BE. Et quia^a DE, BC parallelae, erit $\triangle BDE =^{\lambda} x$. hyp. $\triangle CDE$. Ergo $\triangle BDE: \triangle ADE =^{\mu} \triangle CDE: \triangle ADE$. Atqui $\triangle BDE: \triangle ADE =^{\nu} BD: DA$, & $\triangle CDE: \triangle ADE = CE: EA$. Ergo $BD: DA = CE: EA$. Q. E. D. ξ . 11. 3.

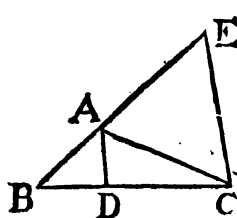
2. Quia^a $BD: DA = CE: EA$, & $BD: DA =^{\pi} \triangle BDE: \triangle EDA$, & $CE: EA = \triangle CDE: \triangle EDA$: erit^e $\triangle BDE: \triangle EDA = \triangle CDE: \triangle EDA$, & hinc $\triangle BDE =^{\sigma} \triangle CDE$. Quare^r ED, BC parallelae sunt. Q. E. D. γ . 39. 2.

PROP. III. THEOR.

Si trianguli ABC angulus A bifariam secetur, secans autem angulum recta linea AD secet etiam basin BC: basium segmenta BD, DC eandem rationem habebunt, quam reliqua trianguli latera BA, AC.

I 4

Et



Et si basis BC segmenta BD, DC eandem habent rationem, quam reliqua trianguli ABC latera BA, AC: quae a vertice A ad sectionem D ducitur recta linea AD, trianguli angulum A bifariam secabit.

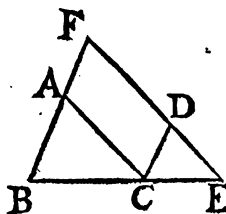
u. 29. 1.
φ. hyp.
x. 6. 1.
ψ. 2. 6.

1. Ducatur enim ad AD parallela CE, & producat BA in E. Quia ergo ang. ACE =^u CAD, & AEC =^u BAD, & CAD =^φ BAD: erit ACE = AEC, & AC =^x AE. Hinc ψ BD: DC = BA: AC. Q. E. D.

u. 11. 5.
u. 9. 5.
β. 5. 1.

2. Iisdem constructis, si BD: DC = BA: AC: quia BD: DC =^ψ BA: AE, erit BA: AC =^u BA: AE, & ergo AC =^x AE, & ang. ACE =^β AEC. Sed ang. ACE =^u DAC & ang. AEC =^u BAD. Ergo ang. BAD = DAC. Angulus igitur A bisectus est a recta AD. Q. E. D.

PROP. IV. THEOR.



Aequiangulorum triangulorum ABC, DCE proportionalia sunt latera quae circum aequales angulos; & homologa sunt latera, quae aequalibus angulis subtenduntur.

Sit ang. A = D, B = DCE, & ACB = E: dico fore BA: AC = CD: DE, item BC: CA = CE: ED, & AB: BC = DC: CE.

Posita

Posita enim CE ipsi BC in directum, pro-
duc BA & ED, quae in F concurrent: quia
ang. B + E = γ B + ACB < δ 2. Rectis. γ . hyp.
Et quia ergo CD ad BF, & AC ad FE paral- δ . 17. 1.
la^e est: erit² AF = CD, & FD = AC. Sed δ . 28. 1.
BA: AF = BC: CE, & alterne AB: BC = AF: δ . 34. 1.
CE, & DC: CE = δ AF: CE. Ergo AB: BC δ . 2. 6.
= DC: CE. δ . 7. 5.

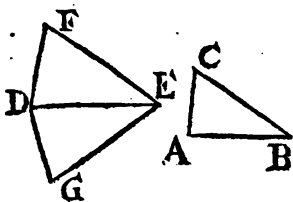
Rursus ob CD, BF parallelas est δ BC: CE
= FD: DE = AC: DE. Ergo alterne BC:
CA = CE: ED.

Et quia erat AB: BC = DC: CE: erit ex
aequo δ BA: AC = CD: DE. Q. E. D. δ . 22. 5.

* Scholium.

1. Hinc AB: DC = δ BC: CE = AC: DE. δ . 16. 5.
2. Si in Δ . EFB ducitur basi BF parallela CD;
est BF: CD = BE: EC = FE: ED. δ . 18. 5.
3. Triangula aequiangula similia sunt.

PROP. V. THEOR.



*Si duo triangula
ABC, DEF latera ba-
beant proportionalia:
aequiangula erunt
triangula, & aequa-
les habebunt angulos,
quibus homologa latera subtenduntur.*

Fac ad rectae DE^a punctum quidem D ang.
EDG = CAB, ad punctum vero E ang. DEG δ . 23. 1.
= CBA: & reliqui G, C aequales erunt². δ . 32. 1.
Ergo² AB: BC = DE: EG. Sed^o AB: BC = δ . 4. 6.
DE: EF. Ergo EG = δ EF. Similiter quia δ . hyp.
 δ . 9. 5.

I 5

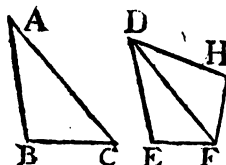
ED:

6. 8. 1.

ED: DG \equiv AB: AC \equiv ED: DF, erit DG \equiv DF. Quare \angle ang. F \equiv G \equiv C, & ang. FDE \equiv EDG \equiv A, & ang. FED \equiv DEG \equiv B. Q. E. D.

* Schol. Talia ergo triangula similia sunt. (3. sch. 4. 6.)

PROP. VI. THEOR.



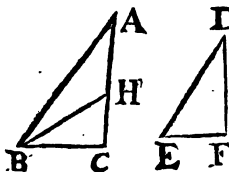
Si duo triangula ABC, DEF unum angulum A uni angulo FDE aequalem habeant; circa aequales autem angulos latera proportionalia (BA: AC \equiv ED: DF): aequiangula erunt triangula, & aequales habebunt angulos, quibus homologa latera BA, ED, & AC, DF subtenduntur (B \equiv DEF, & C \equiv DFE).

6. 32. 2.
7. 4. 6.
v. hyp.
4. 9. 5.
2. 4. 1.

Ad rectam DF, fiant ang. HDF \equiv A vel FDE, & ang. DFH \equiv C. Erit ergo \angle ang. H \equiv B, & HD: DF \equiv BA: AC \equiv ED: DF. Quare \angle HD \equiv ED, ideoque \angle ang. DEF \equiv H \equiv B, & ang. DFE \equiv DFH \equiv C. Q. E. D.

* Schol. Talia ergo triangula similia sunt.

PROP. VII. THEOR.



Si duo triangula ABC, DEF unum angulum A uni D aequalem habeant; circa alios autem angulos ABC & E latera proportionalia

tionalia ($AB:BC = DE:EF$); *reliquorum vero* C, F *utrumque simul vel minorem vel non minorem recto*: *aequiangula erunt triangula, & aequales habebunt angulos* ABC & E, *circa quos lura sunt proportionalia.*

1. Si enim non est $ABC = E$: sit alteruter ABC maior, & ponatur \angle ang. ABH = E. Sint ψ . 23. 2. C, F acuti. Iam quia & $A = D$: erit in aequi-^{a. 32. 1.} angulis^{a. 4. 6.} triangulis ABH, DEF, $AB: BH = DE: EF$. Sed ^{β} $AB: BC = DE: EF$. Er- ^{γ} 9. 5. go ^{γ} $BH = BC$, ideoque ^{δ} ang. BHC = C < ^{β} \angle . 5. 1. Recto. Quare ^{ϵ} ang. BHA > recto, & proinde ang. F > recto; contra hypothesin.

2. Pone autem utrumque C, F non esse recto minorem, & tamen $ABC > E$. Quia ang. BHC = C: ang. BHC + C non essent duobus rectis minores. Q. E. A². Ergo in utroque casu ang. ABC = E; & hinc ang. C = F. Q. E. D.

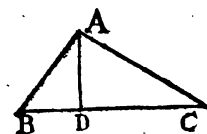
* *Scholium.*

1. Talia ergo triangula etiam similia sunt. (3. sch. 4. 6).

2. Eodem prorsus modo ex 26. 1. in locum 4. 6. substituta demonstrari potest hoc theorema: Si duo triangula unum angulum uni aequalem habeant, circa alios autem angulos latera aequalia, reliquorum vero angulorum utrumque simul aut minorem aut non minorem recto: aequalia erunt triangula, & aequales habebunt angulos, circa quos sunt aequalia latera, & tertium latus tertio aequale habebunt.

PROP.

PROP. VIII. THEOR.



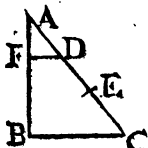
Si in triangulo rectangulo ABC ab angulo recto A ad basin BC perpendicularis AD ducatur: quae ad perpendicularem sunt triangu- la ADB, CDA & toti ABC & inter se sunt similia.

4. 10. ax. Nam ang. BDA =^r CDA = BAC, & ang.
 3. 32. l. BAD =^r C, ob communem B, item ang.
 CAD = B, ob communem C. Ergo Δ a. ADB,
 4. 3. sch. 4. 6. CDA, & ABC sunt aequiangula, & proinde
 similia. Q. E. D.

Coroll.

Ex hoc manifestum est, in triangulo rectangulo perpendicularem, ab angulo recto ad basin ductam, mediam proportionalem esse inter segmenta basis (\div BD, DA, DC); & praeterea, inter basin & basis segmentum utrumlibet, latus segmento conterminum medium esse proportionale (\div BC, CA, CD, & \div CB, BA, BD).

PROP. IX. PROBL.



A data recta linea AB imperatam partem (e. gr. tertiam) abscindere.

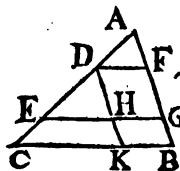
Ducatur ex A sub quovis angulo recta AC, & in ea sumatur punctum D utcumque, & ipsi AD aequales fiant DE, EC. Iunctae BC parallela fiat DF.

- x. 2. 6. Erit ergo \ast BF : FA = CD : DA. Sed DC
 1. 8. def. 5. =^r DA, ergo BF =^r 2 AF, & AB =^r 3 AF,
 id est AF = $\frac{1}{3}$ AB. Q. E. F.

** Schol.*

* *Schol.* Sumitur in hac demonstratione, si quatuor magnitudinum proportionalium ($CD : DA = BF : FA$) prima secundae sit multiplex, tertiam quartae aequae multiplicem esse. Cuius veritas, si cui ex 3. & 8. def. 5. non pateret, sic ostendi posset. Sumatur aliqua G, quae sit aequae multiplex ipsius FA ac CD ipsius DA: erit (15. 5.) $G : CD = FA : DA$, & alterne $G : FA = CD : DA = BF : FA$. Ergo $BF = G$. & ideo BF tam multiplex ipsius FA, quam CD ipsius DA.

PROP. X, PROBL.



Datam rectam lineam intersectam AB similiter secare, ut data recta AC secta est (in D, E).

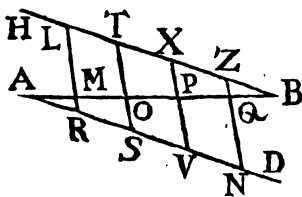
Pone datas AB, AC ita ut quemuis angulum A comprehendant; iunge BC, & huic duc parallelas EG, DF.

Iam, si praeterea ipsi AB ducta fuerit parallela DHK, erit $^{\mu}$ $DH = FG$ & $HK = GB$. Porro in $\triangle KDC$ est $^{\nu}$ $CE : ED = KH : HD$ $^{\mu}$ 34. 2. $^{\nu}$ 2. 6. $=^{\xi}$ $BG : GF$. Et in $\triangle GAE$ est $ED : DA =^{\nu}$ 5. 7. 5. $GF : FA$. Ergo segmenta rectae AB habent ut segmenta rectae AC. Q. E. F.

* *Corollar.*

Ergo si ad unum trianguli latus plures parallelae ductae fuerint: erunt omnia laterum reliquorum segmenta proportionalia.

* *Scho-*

* *Scholium.*

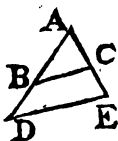
Hinc discimus
rectam datam AB in
quotvis aequales par-
tes (puta 5) secare,
id quod facilius
praestatur sic: Duc
infinitam AD, eique
parallelam BH et-

iam infinitam. Ex his cape partes aequales AR,
RS, SV, VN, & BZ, ZX, XT, TL, in singulis vna
pauciores, quam desiderantur in AB. Tum rectae
ducantur LR, TS, XV, ZN, hae quinquise-
cantur datam AB. Nam RL, ST, VX, NZ^o parallelae
sunt, ergo quum AR, RS, SV, VN aequales sint,
erunt^π AM, MO, OP, PQ aequales. Similiter
quia BZ = ZX, erit BQ = QP. Ergo AB quin-
quisepta est.

p. 33. 1.

π. cor. huj.
& sch. 14-5.

PROP. XI. PROBL.



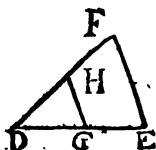
*Duabus datis rectis lineis AB,
AC tertiam proportionalem inue-
nire.*

Datas rectas sub quovis angulo A
positas produc, & in AB producta ca-
pe BD = AC, iunge BC, cui parallelam age DE.

p. 2. 6.

Sic erit AB:BD id est AB:AC = AC:CE.
Q. E. F.

PROP. XII. PROBL.



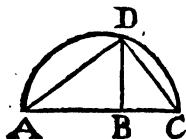
*Tribus datis rectis
lineis A, B, C, quar-
tam proportionalem in-
uenire.*

Sub angulo quovis
D ducantur rectae infinitae DE, DF, in quibus
capia-

capiatur $DG = A$, $GE = B$, $DH = C$; iunctae GH parallela ducatur EF .

His enim factis erit $DG : GE = DH : HF$, *c. 2. 6.*
id est $A : B = C : HF$. Q. E. F.

PROP. XIII. PROBL.



*Duabus datis rectis lineis
AB, BC, mediam proportiona-
lem inuenire.*

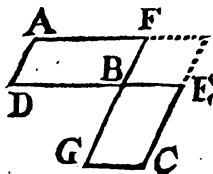
Ponantur in directum, &
super AC describatur semi-
circulus ADC , ducaturque a puncto B ipsi AC
ad rectos angulos BD .

Ductis enim AD , DC , erit, ob ang. ADC *r. 31. 3.*
rectum, $\therefore AB : BD, BC$ *v. cor. 8. 6.* Q. E. F.

* Scholium.

Et (per 1. sch. 31. 3.) si recta BD , rectae AC ad rectos
insistens, sit media proportionalis inter huius segmen-
ta AB, BC : semicirculus super hac AC descriptus,
per extremum illius D transibit. Nam quia (per 6. 6)
ang. $A = BDC$, & $C = ADB$: erit ADC rectus
(per cor. 31. 3).

PROP. XIV. THEOR.

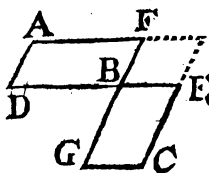


*Parallelogrammorum AB,
BC, aequalium, & unum an-
gulum B uni B aequalem ha-
bentium, reciproce propor-
tionalia sunt latera, quae
circum aequales angulos*

*(DB : BE = GB : BF). Et quorum parallelo-
grammorum AB, BC, unum angulum B uni B
aequalem habentium, reciproce proportionalia
sunt latera, quae circum aequales angulos B,
illa inter se sunt aequalia.*

Positis

φ. 3. sch. 15.1.



Positis in directum DB & BE: erunt & FB, BG φ in directum. Compleatur Pgr. FE.

κ. 7. 5.

ψ. 1. 6.

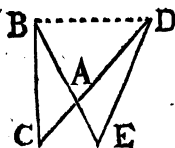
ω. 11. 5.

1. Iam quia Pgr. AB = BC: erit AB: FE = κ BC: FE. Sed AB: FE = ψ DB: BE, & BC: FE = GB: BF. Ergo DB: BE = ω GB: BF. Q. E. D.

α. 9. 5.

2. Quia per hyp. DB: BE = GB: BF; & DB: BE = ψ Pgr. AB: FE; & GB: BF = BC: FE: erit Pgr. AB: FE = ω BC: FE; quare Pgr. AB = α BC. Q. E. D.

PROP. XV. THEOR.



Triangulorum aequalium, ABC, ADE, & unum angulum BAC uni DAE aequalem habentium, reciproce proportionalia sunt latera, quae circum aequales angulos (CA: AD = EA:

AB). Et quorum triangulorum ABC, ADE, unum angulum BAC uni DAE aequalem habentium, reciproce proportionalia sunt latera, quae circum aequales angulos, illa sunt inter se aequalia.

β. 3. sch. 15.1. Ponantur in directum latera CA, AD, quo facto & BA, AE in directum β erunt. Iungantur quoque BD.

γ. 7. 5.

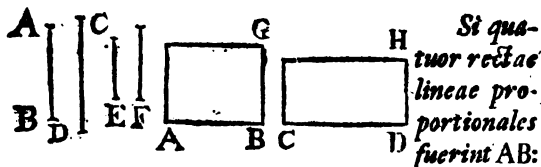
δ. 1. 6.

1. Iam quia Δ. ABC = ADE per hyp. erit γ Δ. ABC: Δ. ABD = Δ. ADE: Δ. ABD. Atqui Δ. ABC: Δ. ABD = δ CA: AD, & Δ. ADE:

ADE: $\triangle ABD = EA: AB$. Ergo CA: AD \propto u. 5.
 $= EA: AB$. Q. E. D.

2. Quum per hyp. CA: AD $= EA: AB$, &
 CA: AD $= \triangle ABC: \triangle ABD$, & EA: AB $= \triangle ADE: \triangle ABD$: erit $\triangle ABC: \triangle ABD = \triangle ADE: \triangle ABD$. Ergo $\triangle ABC = \triangle ADE$. Q. E. D.

PROP. XVI. THEOR.



CD $= E: F$: rectangulum AB \times F, sub extremis comprehensum, aequale est rectangulo CD \times E, quod sub mediis comprehenditur. Et si rectangulum AB \times F, sub extremis comprehensum, aequale fuerit ei CD \times E, quod sub mediis comprehenditur: quatuor rectae lineae AB, CD, E, F proportionales erunt.

Fiat enim ζ super AB rectangulum cuius ζ . sch. 46. 1. alterum latus BG $= F$, item super CD fiat Rgl. CH, cuius alterum latus DH $= E$.

1. Quia ponitur AB: CD $= E: F = DH: BG$: \propto 7. 5.
 BG: erit $\triangle AG = CH$, id est AB \times F $= CD \times E$. Q. E. D.

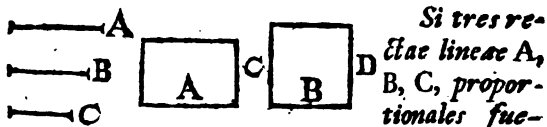
2. Quia Pgra. AG, CH, angulos rectos B, D aequales habentia, aequalia ponuntur: erit AB: CD \propto DH: BG $= E: F$. Q. E. D.

* Schol. Hinc ad datam rectam AB facile est datum rectangulum CH applicare, faciendo AB: \propto 12. 6. CD $= DH: BG$.

K

PROP.

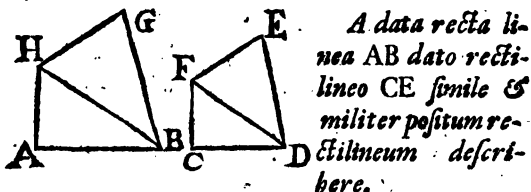
PROP. XVII. THEOR.



Si tres rectae lineae A, B, C, proportionales fuerint: rectangulum sub extremis A, C comprehensum aequale est ei quod a media B fit quadrato. Et si rectangulum sub extremis A, C comprehensum aequale fuerit ei quod a media B fit quadrato: tres rectae lineae A, B, C, proportionales erunt.

1. Sit $D = B$. Iam quia (hyp.) $A : B = B : C$: erit $A : B = D : C$. Ergo $A \times C = B \times B$.
 2. Quia ponitur $A \times C = B \times B$: erit $A : B = D : C$. Q. E. D.

PROP. XVIII. PROBL.

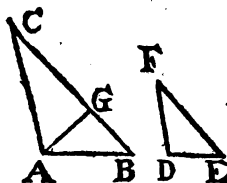


μ . 23. 1. Iunge DF, & fac^{te} ang. $A = C$, & ang. $ABH = CDF$, ang. vero $BHG = DFE$, & ang. $HGB = FDE$. Rectilineum AHGB erit \sim ipsi CDEF.

ν . constr. & Nam Δ . HBA aequiangulum est Δ FDC:
 32. 1. & ergo $\frac{HB}{FD} = \frac{HA}{FC} = \frac{AB}{CD}$.
 §. 1. sch. 4. 6. Eadem ratione in Δ is HGB, FED est $\frac{HB}{FD} = \frac{BG}{DE} = \frac{GH}{EF}$. Ergo $\frac{HA}{FC} = \frac{BG}{DE} = \frac{GH}{EF}$.
 6. 11. 3. = AB

$\equiv AB: CD \equiv BG: DE \equiv GH: EF$. Præterea per constr. est ang. $A \equiv C$, & $B \equiv ABH + HBG \equiv CDF + FDE \equiv D$, & $G \equiv E$, & $H \equiv GHB + BHA \equiv EFD + DFC \equiv F$. Ergo rectilineum AHGB dato CE simile π est π . 1. def. 6. & similiter super data AB positum. Q.E.F.

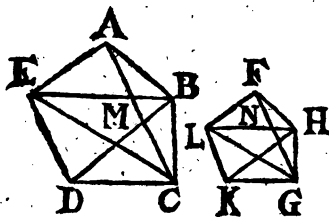
PROP. XIX. THEOR.



*Similia triangu-
la ABC,
DEF sunt inter se in dupli-
cata ratione laterum homo-
logorum, BC, EF.*

Fiat enim $\epsilon \div BC, EF$, ϵ . 11. 6.
BG, iungatur GA. Quia
igitur (hyp.) est $AB: BC \equiv DE: EF$, & alter- ϵ . 16. 5.
ne $AB: DE \equiv BC: EF \equiv EF: BG$, ang. au- γ . contr.
tem $B \equiv E$ (hyp.): erit $\triangle ABG \equiv \triangle DEF$. ν . 15. 6.
Quare $\triangle ABC: \triangle DEF \equiv \triangle ABC: \triangle ABG$ ϕ . 7. 5.
 $\equiv BC: BG \equiv (BC: EF)^2$. Q. E. D. χ . 1. 6.
 ψ . 10. def. 5.

PROP. XX. THEOR.



*Similia poly-
gona ABCDE,
FLKGH in simi-
lia triangu-
la di-
uiduntur, & nu-
mero aequalia,
& homologa to-*

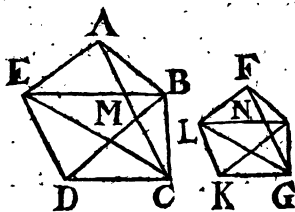
*sis. Et polygonum ABCDE ad polygonum
FLKGH duplicatam rationem habet eius, quam
latus homologum AB habet ad latus homologum
FH.*

K 2

L. Iun-

α. 1. def. 6.

β. 6. 6.



l. Iungantur
EB, EC, LH,
LG. Quia^a ang.
EAB = LFH,
& BA: AE =
HF: FL: erit^β
Δ. EAB ~ Δ

LFH, & ang. ABE = FHL, & EB: BA = LH:
HF. Sed est etiam^a ang. ABC = FHG, &
AB: BC = FH: HG. Ergo ang. EBC =
LHG, & ex aequo^δ EB: BC = LH: HG. Qua-
fe^β Δ BEC ~ Δ HLG, & ang. ECB = LGH,
& EC: CB = LG: GH. Hinc similiter de-
monstratur Δ CED ~ Δ GLK. Q. E. D.

γ. 3. ax.

δ. 22. 5.

2. Dico fore Δ ABE: Δ FHL = Δ BEC:
Δ HLG = Δ CED: Δ GLK = Pol. ABCDE:
Pol. FHGKL. Iungantur enim AC, FG, DB,
KH. Iam quia propter similitudinem poly-
gonorum ang. ABC = FHG, & AB: BC =
FH: HG: erit^β ang. BAM = HFN, & BCM
= HGN. Sed^a ang. ABM = FHN, & MBC
= NHG, ergo^ζ aequiangula sunt Δa ABM,
FHN, item Δ MBC, NHG. Quare^a AM:
MB = FN: NH, & MB: MC = NH: NG,
&^δ ex aequo AM: MC = FN: NG. Atqui^δ
Δ ABM: Δ MBC = AM: MC = Δ AME: Δ
EMC, & hinc Δ ABE: Δ BEC = Δ ABM: Δ
MBC = AM: MC. Similiter ostenditur Δ
FHL: Δ HLG = FN: NG. Ergo^a Δ ABE:
Δ BEC = Δ FHL: Δ HLG, & alternando Δ
ABE: Δ FHL = Δ BEC: Δ HLG. Similiter
ostendemus ope rectarum DB, KH esse Δ BEC:
Δ HLG

ε. dem.

ζ. 32. 1.

η. 4. 6.

θ. 1. 6.

ι. 12. 5.

κ. 11. 5.

$\Delta HLG = \Delta CED : \Delta GLK$. Quare erit $\Delta ABE : \Delta FHL = \Delta BEC : \Delta HLG = \Delta CED : \Delta GLK =$ Pol. ABCDE : Pol. FHGKL. Q. E. D.

Aliter & expeditius idem sic demonstratur.
 Quia $\Delta ABE \sim \Delta FHL$, est $\Delta ABE : \Delta FHL =^{\lambda} (BE : HL)^2$. Sed $\Delta EBC, LHG$ ob similitudinem sunt in eadem ratione $(BE : HL)^2$. Ergo $\Delta ABE : \Delta FHL = \Delta EBC : \Delta LHG$. Similiter $\Delta EBC : \Delta LHG = (CE : GL)^2 = \Delta CED : \Delta GLK$. Ergo $\Delta ABE : \Delta FHL = \Delta EBC : \Delta LHG = \Delta CED : \Delta GLK =$ Pol. ABCDE : Pol. FHGKL. Q. E. D.

3. Dico ABCDE : FHGKL = (AB : FH)². Nam quia $\Delta ABE : \Delta FHL =^{\lambda} (AB : FH)^2$ erit Pol. ABCDE : Pol. FHGKL =^{*} (AB : FH)². Q. E. D.

Corollaria.

1. Quum de similibus quadrilateris eodem modo demonstretur, ea esse in ratione duplicata laterum homologorum, & idem de triangulis¹⁴ ostensum sit: patet vniuerse, *similes rectilineas figuras inter se esse in ratione duplicata homologorum laterum.*

2. Et quia, si homologis lateribus AB, FH tertia proportionalis T sumitur, est AB ad T in ratione duplicata¹⁵ homologorum laterum: manifestum est, *si tres rectae lineae proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse figuram rectilineam, quae sit a prima, ad similem & similiter descriptam a secunda.*

^{*} Schol.

Hinc elicitur methodus figuram quatuvis rectilineam augendi vel minuendi in ratione data. Ut

K 3

si velis

ξ. 13. 6.
ο. 18. 6.

si velis Pentagoni, cuius latus CD, aliud facere quintuplum: inter CD & 5 CD quaere $\frac{1}{2}$ mediam proportionalem, super quam construe pentagonum simile dato. Hoc erit quintuplum dati.

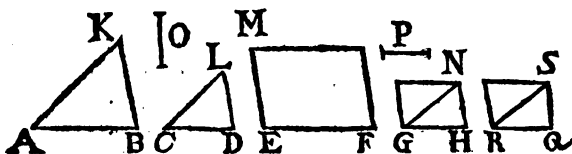
PROP. XXI. THEOR.



Quae A, B, eidem rectilineo C sunt similia, & inter se sunt similia.

Nam quia utrumque A, B eidem C simile
 π. 1. def. 6. est: utrumque π aequiangulum erit ipsi C, & circum aequales angulos latera habebit proportionalia. Quare & A ipsi B aequiangulum est, & in utroque latera circum aequales angulos proportionalia sunt; ac ergo $A \sim B$.
 Q. E. D.

PROP. XXII. THEOR.



Si quatuor rectae lineae proportionales fuerint ($AB:CD = EF:GH$): & rectilinea, AKB, CLD, FM, GN, quae ab ipsis sunt, similia & similiter descripta, proportionalia erunt. Et si rectilinea AKB, CLD, FM, GN, quae ab ipsis AB, CD, EF, GH sunt, similia & similiter descripta, proportionalia fuerint: & ipsae rectae lineae AB, CD, EF, GH proportionales erunt.

1. Su-

1. Sumatur enim τ ipsis AB, CD tertia pro- τ . 11. 6.
portionalis O, & ipsis EF, GH tertia propor-
tionalis P. Et quia est ν AB: CD = EF: GH, ν . hyp.
& ergo CD: O = ϕ GH: P: erit ex aequo χ ϕ . 11. 5.
AB: O = EF: P. Atqui AB: O = ψ AKB: ψ . 22. 5.
CLD, & EF: P = ψ FM: GN. Ergo ϕ est 20. 6.
AKB: CLD = FM: GN. Q. E. D.

2. Sit AKB: CLD = FM: GN, & fiat α AB: α . 12. 6.
CD = EF: QR, a qua α ipsi FM vel GN si- α . 18. 6.
mile & similiter positum RS describatur. Ergo
erit (per part. 1. hui.) AKB: CLD = FM: RS.
Hinc FM: GN = ϕ FM: RS. Est ergo β RS β . 9. 5.
= GN, & hinc (per Lemma sequens) QR =
GH, ideoque AB: CD = γ EF: GH. Q. E. D. γ . 7. 5.

L E M M A.

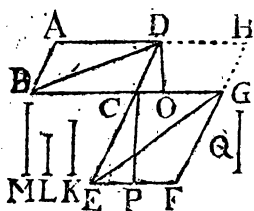
*Si rectilinea GN, RS similia & aequalia sunt:
homologa ipsorum latera GH, QR inter se sunt
aequalia.*

Si enim negas: alterutrum veluti QR > GH
erit. Et quia est per hyp. QR: QS = GH:
HN: erit QS > δ HN. Quare Δ RSQ ipsi δ . 14. 5.
GNH impositum non congruet, sed maius erit.
Est autem ϵ Rectil. SR: Rectil. GN = Δ RSQ: ϵ . 20. 6.
 Δ GNH. Ergo δ esset Rectil. SR > Rectili-
neo GN: contra hypothesin. Ergo GH =
QR. Q. E. D.

K 4

PROP.

PROP. XXIII. THEOR.



Aequiangula Parallelogramma AC, CF inter se rationem habent ex lateribus compositam
 $AC : CF = (BC : CG) + (DC : CE).$

- Positis BC, CG, quae sunt circa aequales
 a. sch. 15. i. angulos C, in directum, erit & ¹DCE vna recta.
 Compleatur Pgr. DHGC, & sumpta aliqua recta
 2. 12. 6. K, fiat ²BC : CG = K : L, & DC : CE = L : M.
 3. 5. def. 6. Erit ergo K : M = ³(K : L) + (L : M) =
 (BC : CG) + (DC : CE). Iam quum sit K : L
 3. 1. 6. = BC : CG = ⁴AC : CH, & L : M = DC : CE
 = ⁵CH : CF : erit ex aequo K : M = AC : CF.
 4. 11. 5. Quare ⁶AC : CF = (BC : CG) + (DC : CE).
 Q. E. D.

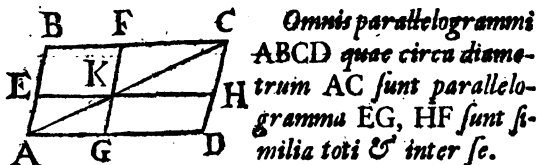
* Scholia.

1. Hinc & ex 34. 1. patet primo, *triangula* BDC
 CEG, quae unum angulum (ad C) aequalem habent,
 esse in ratione composita laterum (BC : CG) + (DC :
 CE) aequalem angulorum continentium.
 2. Patet *rectangula* AD × DO, GC × CP, ac
 2. 33. 1. proinde ⁷Pgra quaecunque AC, CF, & *triangula*
 3. 34. 1. BCD, CEG, rationem inter se habere compositam ex
 rationibus basium & altitudinum, sc. (AD : CG) +
 (DO : CP).
 3. Patet, quomodo *triangulorum ac parallelogram-*
morum ratio exhiberi possit. Sunt Pgra. AC, CF, quo-
 rum bases AD, CG, altitudines vero DO, CP. Fiat
 CP : DO = AD : Q : erit AC : CF = (AD ×
 4. 16. 6. DO : GC × CP = ⁸Q × CP : GC × CP) =
⁹Q : GC.

4. Patet

4. Patet via *dimetiendi propositam parallelogrammum* CF, *vel triangulum*. Sumatur pro unitate quoduis quadratum, cuius latus sit K; quaeratur ratio basis CG, & ratio altitudinis CP ad latus K, e. gr. sit $CG = 2 K$, & $CP = 3 K$; multiplicentur hi numeri per se invicem: dico fore $CF = 6 Kq$. Nam $CF:Kq = (CG:K) + (CP:K) = (2:1) + (3:1) = 6:1$. Ergo $CF = 6 Kq$. v. 5. def. 6. Hinc ΔCEG erit $3 Kq$.

PROP. XXIV. THEOR.



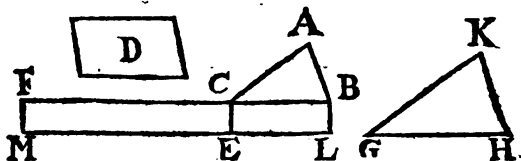
Nam, quia EH ad CB parallela, est $\frac{1}{2}$ BE: $EA = CK:KA$. Et quia GF, CD parallelae sunt, est $\frac{1}{2}$ CK:KA = DG:GA. Ergo $\frac{1}{2}$ BE: $\frac{1}{2}$ EA = DG:GA, & componendo $\frac{1}{2}$ BA:AE = DA:AG, & alterne $\frac{1}{2}$ BA:AD = EA:AG, id est latera circum angulum communem BAD proportionalia sunt. Porro quia triangula GAK, KAE triangulis CAD, CAB aequiangulara sunt: erit & totum Pgr. EG toti ABCD aequiangulum, & circum aequales angulos D, G, erit AD:DC = AG:GK; circum aequales autem B, E, AB:BC = AE:EK; denique ob eandem rationem DC:CA = GK:KA, & CA:CB = KA:EK, ideoque ex aequo DC:CB = KG:EK circum aequales angulos BCD, EKG. Ergo Pgra. ABCD, EG similia sunt. Idem eodem modo de Pgris. ABCD & FH ostenditur. Ergo etiam ipsa GE, HF similia sunt. Q.E.D. K 5

* Coroll.

* *Coroll.* Hinc pgra, quae vñum angulum vñi angulo aequalem & circum eos proportionalia latera habent, similia sunt.

PROP. XXV. PROBL.

*Dato rectili eo ABC simile & alteri dato D
aequale idem constituere.*



2. 44. vel 45. 1. Applicetur \propto ad rectam BC rectilineo ABC
aequale Pgr. BE, ad rectam vero CE dato D
aequale Pgr. CM, in angulo FCE = CBL. Su-
mmatur inter BC, CF media ψ proportionalis GH,
a qua describatur* rectilineum KHG ipsi ABC
simile & similiter positum. Dico etiam esse
KHG = D.

s. constr.

β. 29. L

7. 14. 1.

2. 1. 6.

5. 2. COR.

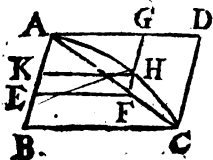
20. 6.

2. 12. 5.

* 9. 5.

Nam quia ang. $FCE + ECB = BCE + ECB = 2$. rectis: erunt BC, CF in \vee directum, itemque LE, EM . Quare $BC: CF = BE: CM = ACB: D$. Iam quum sit $\frac{1}{2} BC, GH, CF$: est $BC: CF = ABC: KHG$. Ergo $ABC: KHG = ABC: D$, & hinc $KHG = D$. Q. E. F.

PROP. XXVI. THEOR.

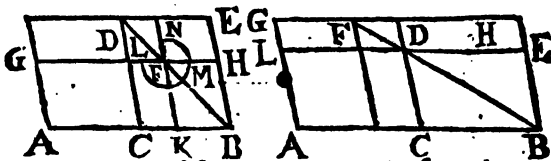


*Si a parallelogrammo AB
CD parallelogrammum AE
FG auferatur simile toti, &
similiter positum, communens
cum ipso. angulum DAB ha-
bens:*

bens : circa eandem diametrum AC est cum toto.

Si negas: fit AHC diameter Pgrⁱ ABCD secans GF extra F, vt in H, & ducatur ipsi AD vel BC parallela HK. Erit⁹ ergo Pgr. GK si-^{9. 24. 6.} mile toti ABCD, & hinc $DA : AB = GA : AK.$ ^{1. def. 6.} Sed quia ponitur Pgr. GE \cap ABCD: est quoque $DA : AB = GA : AE.$ Ergo $GA : AK = GA : AE,$ hinc $AK = AE.$ Q. F. N. ^{11. 5. 9. 5.}

PROP. XXVII. THEOR.

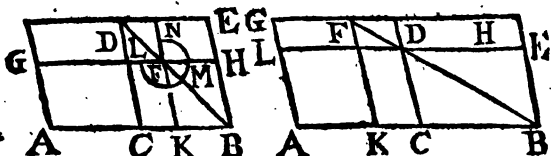


Omnium parallelogrammorum AF secundum eandem rectam lineam AB applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis KH, similibus & similiter positis ei CE, quae a dimidia CB describitur, maximum est AD, quod ad dimidiam AC est applicatum, simile existens defectui KH.

Ducatur ipsius KH diameter FB, & ipsius CE diameter DB, & describatur figura. Et quia KH \cap CE, diametri illorum¹⁴ FB, BD ^{26. 6.} coincident. Iam

Cas. 1. Sit $AK > AC.$ Quoniam¹ $CF = FE:$ erit, addito KH communi, $CH = KE.$ ^{43. 1.} Ergo $CG = \frac{1}{2} CH = KE,$ &, addito CF communi, $AF = \text{gnom. LMN.}$ Atqui $AD = \frac{1}{2} CE > \text{gnomone LMN.}$ Ergo $AD > AF.$ ^{36. 1.} Q. E. D.

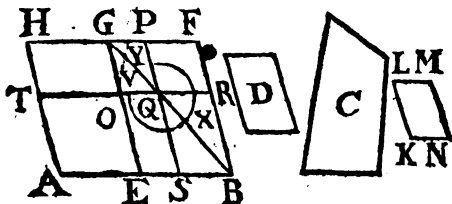
Cas.



v. 43. 1.
 §. 36. 1.
 e. 34. 1.

Cas. 2. Sit $AK < AC$. Quia $CB = AC$:
 erit $ED = DL$, & hinc $DH = DG > FL$.
 Ergo $DK = DH > FL$: & communi LK ad-
 dito, $AD > AF$. Q. E. D.

PROP. XXVIII. PROBL.



*Ad datam rectam lineam AB dato rectilineo
 Caequale parallelogrammum applicare, deficiens
 figura parallelogramma, quae similis sit alteri
 datae D: oportet autem datum rectilineum C,
 cui aequale applicandum est, non maius esse eo,
 quod ad dimidiam AB applicatur, similibus ex-
 sistentibus defectu eius, quod ad dimidiam AB
 applicatur, & parallelogrammo D, cui oportet
 simile deficere.*

π. 10. 1.
 §. 18. 6.

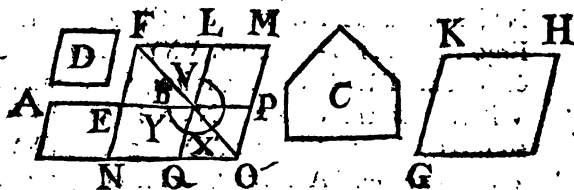
Biseca AB in E , & ab ipsa EB fac: Pgr. EF .
 ipsi D simile & similiter positum, & comple
 Pgr. AG . Iam si $AG = C$: factum est quod
 proponebatur.

Si

Si vero non sit $AG = C$; quum non pos-
sit esse $AG < C$: erit $AG > C$. Igitur fac
Pgr. $KLMN = AG - C$ & simile similiterque
positum ipsi D vel^o FE , ita ut ML , FG sint
homologa latera, item LK & GE . Deinde
pone $GO = LK$, & $GP = LM$, comple Pgr.
 $GOQP$, produc PQ in S , & OQ in T & R . Di-
co esse pgr. $TS = C$, & deficere pgro. SR
 $\sim D$.

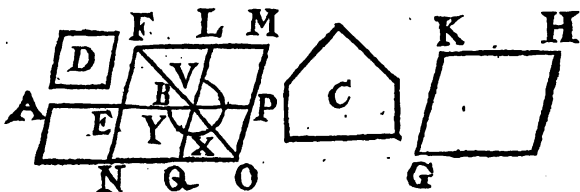
Nam quia pgr. $EF \sim KM$, & FG homolo-
gum ipsi ML , GE vero ipsi LK : erit \angle ang. ϕ . 1. def. 5.
 $FGE = MLK$. Est autem praeterea $PG =$
 ML , & $GO = LK$: ergo pgr. $OP = \sim$ & \sim χ . 4. & 34. 1.
 KM , & \sim EF . Quia praeterea $OP = KM$ & cor. 24. 6.
 $< AG$ vel^o EF : erit^o OP circa eandem dia-
metrum GOB cum toto EF . Quare $FQ =$
 EQ , & communi SR addito, $FS = ER =$
 TE , & communi OS addito, gnomon VXY
 $= TS$. Est autem gnom. $VXY + OP = EF =$
 $AG = KM + C$; & $OP = KM$: ergo gnom.
 $VXY = C$. Quare $TS = C$. Deficit autem
 TS pgro. $SR \sim EF \sim D$. Q. E. D.

PROP. XXIX. PROBL.



Ad datam rectam lineam AB , dato rectilineo
Caequale parallelogrammum applicare, excedens
figura

figura parallelogramma, quae similis sit alteri datae D.



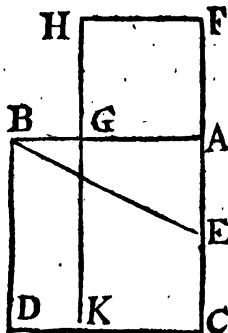
3. 10. 1. Biseca AB ³ in E, & ab EB describe ¹ ipsi D
 5. 18. 6. simile & similiter positum pgr. EBLF. Fac
 2. 25. 6. GH ipsi EL simile & similiter positum ² & ipsis
 EL + C aequale, ita quidem vt KH homo-
 loga sit ipsi FL, & KG ipsi FE. Postea in pro-
 ductis FL, FE, cape FM = KH & FN = KG,
 comple pgr. FMON, & produc AB in P, &
 LB in Q. Dico AO = C, & excedere pgro.
 QP simili ipsi D.

4. constr. Nam quia ⁴ EL ~ GH, & FL, KH homo-
 loga sunt latera, ac FE, KG etiam homologa:
 9. 1. def. 6. ang. EFL = ⁹ K. Sed FM = ⁷ KH, & FN
 4. 8. 22. & = KG: ergo NM = & ~ ¹ GH. Quare
 cor. 24. 6. & EL ~ ⁸ NM. Et est EL < NM, quia NM,
 11. 21. 6. = GH = ⁷ EL + C. Quare ¹ EL cum toto
 2. 26. 1. NM circa eandem diametrum FBO consistit.
 Ergo NM = EL + gnom. VXY. Erat vero
 & NM = EL + C: erit igitur C = gnom.
 11. 36. 1. VXY. Porro quia ¹⁰ AN = EQ = ¹ LP:
 7. 43. 1. addito communi NP, erit AO = gnom. VXY.
 Vnde patet esse AO = C. Excedit autem
 8. 24. 6. AO parallelogrammo QP ~ ² EL ~ ¹ D.
 Q. E. F.

PROP.

PROP. XXX. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam AB secundum extremam & mediam rationem secare.



Describe * ex AB qua- o. 46. 1.
dratum BC, & * applica ad p. 29. 6.
AC ipsi BC aequale pgr.
CH, excedens figura AH
A ipsi BC simili. Dico AB
ita sectam esse in G, vt AG
> GB, & $AB:AG = AG:GB$.
E GB.

Nam quia $BC = CH$:
C erit $DG = AH$: quare
quum ang. KGB = \angle AGH, p. 15. 1.
erit $KG:GH = \tau AG:GB$. Quum autem o. 14. 6.
AH, quadrato BC simile, ipsum sit quadratum:
erit $GH = AG$. Et $GK = \tau CA = AB$. r. 34. 1.
Est ergo $AB:AG = AG:GB$, & quum sit AB
> AG, est $AG > \nu GB$. Q. E. F. v. 14. 5.

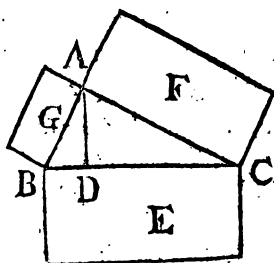
Aliter.

Secetur ϕ AB in G ita vt $AB \times BG = \phi$. n. 2.
AGq.

Nam quum ergo κ sit $AB:AG = AG:\kappa$. 17. 6.
GB, & $AG > GB$: erit sic quoque AB se-
cundum extremam & mediam rationem se-
cta ψ . Q. E. F. ψ . 3. def. 6.

PROP.

PROP. XXXI. THEOR.



*In rectangulis
triangulis BAC fi-
gura E, quae fit a
latere BC, rectum
angulum A subten-
dente, aequalis est
eis F + G, quae a
lateribus rectum an-
gulum comprehen-*

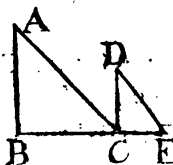
dentibus sunt, similibus & similiter descriptis.

- α. cor. 8. 6.* Duc perpendicularem AD: & erit $\alpha \div BC$,
β. 2. cor. 20. 6. BA, BD, item $\div BC$, CA, DC. Hinc βBC :
 $BD = E: G$, & $BC: DC = E: F$, vel inuerse
 $DC: BC = F: E$, & $BD: BC = G: E$. Er-
γ. 24. 5. go $\gamma BD + DC: BC = F + G: E$. Sed BD
δ. sch. 14. 5. + DC = BC: ergo $\delta F + G = E$. Q.E.D.

Aliter.

- α. 1. cor. 20. 6.* $F: E = (CA: BC)^2 = CAq: BCq$, & G :
 $E = (AB: BC)^2 = ABq: BCq$. Ergo γF
 $+ G: E = CAq + ABq: BCq$. Sed CAq
ζ. 47. 1. + ABq = ζBCq . Ergo $F + G = \delta E$.

PROP. XXXI. THEOR.



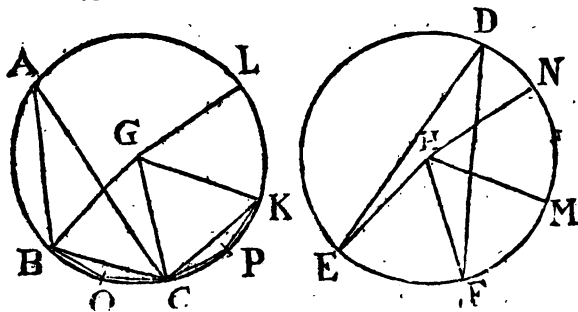
*Si duo triangula ABC,
DCE, quae duo latera duobus
lateribus proportionalia ha-
bent ($BA: AC = CD: DE$),
componantur secundum unum
angulum ita, ut homologa latera ipsorum BA &
CD, item AC & DE, sint parallela: reliqua trian-*

triangulorum latera BC, CE in directum sibi in-
ajcem erunt.

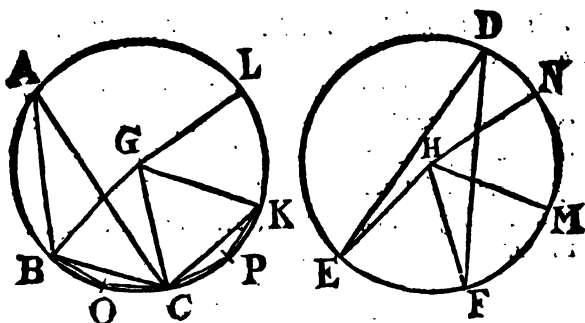
Quia enim \angle ang. $BAC = ACD = CDE$, 29. 1.
& $BA : AC = CD : DE$: erit ang. $B = DCE$, 6. 6.
& hinc ang. $ACE = B + BAC$, ideoque ang.
 $ACE + ACB = B + BAC + ACB =$ 32. 1.
rectis. Ergo BC, CE in directum erunt. Q. 14. 1.
E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

In circulis aequalibus ABC, DEF anguli ean-
dem habent rationem, quam circumferentiae
BC, EF, quibus insistant, siue ad centra G, H,
vt BGC, EHF, siue ad circumferentias, vt BAC,
EDF, insistant; ad huc etiam & sectores GBC,
HEF, quippe qui ad centra sunt constituti.



1. Sint circumferentiae BC deinceps quot-
cunque aequales CK, KL, & ipsi EF rursus to-
tidem aequales FM, MN. Iungantur GK, GL,
HM, HN. Erit ergo ang. $BGC = CGK$ 27. 3.
 $= KGL$. Hinc circumferentia BKL & ang.
BGL aequae multiplices erunt circumferentiae
L BC



BC & anguli BGC. Eadem ratione circumf.
EMN & ang. EHN aequae erunt multiplices
circumferentiae EF & anguli EHF. Et si circ.
BKL $>$, $=$, $<$ circ. EMN: erit quoque ang.
BGL $>$, $=$, $<$ ang. EHN. Ergo circ. BC:
 μ . 5. def. 5. circ. EF $=$ μ ang. BGC: ang. EHF $=$ ang.
 ν . 15. 5. BAC: ang. EDF. Q. E. D.

& 20. 3. 2. Iungantur BC, CK, & sumtis in circum-
ferentiis BC, CK, punctis O, P, iungantur &
BO, OC, CP, PK. Et quia ang. BGC $=$ CGK,
 ξ . 4. 1. & BG $=$ CG, & CG $=$ GK: est Δ BGC $=$
 Δ CGK, & basis BC $=$ CK. Et quum sit circ.
BC $=$ circ. CK: erit & reliqua BAKC $=$ re-
liquae CALK; & ergo ang. BOC $=$ \wedge CPK, &
 λ . 27. 3. segmentum BCO \sim \wedge segm. CKP. Quare
 α . 11. def. 3. quum haec segmenta sint super aequales rectas
BC, CK: aequalia \wedge erunt. Erant vero & Δ a.
 ω . 24. 3. BGC, CGK aequalia: ergo totus sector GBC
 $=$ GCK. Similiter ostenditur sector GKL $=$
GCK $=$ GBC, & sector HMN $=$ HFM $=$
EHF. Quam multiplex ergo circ. BKL cir-
cumferentiae BC, tam multiplex est sector GBL
sectoris

sectoris GBC; & quam multiplex circ. EMN
circ. EF, tam multiplex sector HEN sectoris
HEF; & ex modo ostensis, si circumf. BCL
>, =, < circ. EMN, est quoque sector GBE
>, =, < sectore HEN. Ergo circumf. DC;
circ. EF = sector GBC: sect. HEF. Q.E.D.

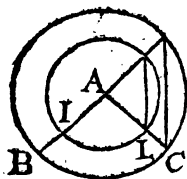
Corollar.

Perspicuum etiam est, ut sector ad sectorum, ita p. 11. 5.
esse angulum ad angulum.

** Schol.*

1. Hinc ang. BGC ad centrum est ad 4 rectos,
ut arcus BC ad totam peripheriam. Nam ang. BGC
ad rectum, ut arcus BC ad quadrantem. Ergo
BGC ad 4. rectos ut arcus BC ad 4. quadrantes seu
totam circumferentiam. (sch. 4. 5.)

Item ang. ad peripheriam A est ad 2 rectos, ut
arcus BC ad totam peripheriam.



2. Inaequalium circulorum
arcus IL, BC, qui aequales sub-
tendunt angulos, siue ad centra, ut
IAL & BAC, siue ad periphe-
rias, sunt similes: Et vice
versa, arcus similes aequales an-
gulos subtendunt.

Nam IL: periph. = ang. IAL (vel BAC): 4
Rect; item arc. BC: periph. = ang. BAC: 4 Rect;
ergo IL: periph. = BC: periph. Proinde arcus
IL & BC sunt similes. Vnde

3. Duae semidiametri AB, AC a concentricis pe-
ripheriis arcus auferunt similes IL, BC.

L 2

5. Hisce

4. Hisce insititur vulgaris ratio angulos met-
 di per arcus, qui illos subcendunt. Si enim, da-
 tis toti circumferentiae omnis circuli aliquot par-
 tibus scilicet 360, qui *gradus* vocantur, disquiratur
 ope instrumenti goniometrici, quot gradus sint in
 arcu BC, quot sint in arcu EF: patet per prop. 33.
 rationem angulorum BGC, EHF, quos hi arcus sub-
 tendunt, in numeris exhiberi posse. Et si vnus
 angulus IAL consideratur, & numerus graduum in
 arcu ad eum pertinente IL vel BC inuentus est:
 constat ratio anguli IAL ad 4 Rectos, per schol. 2.
 Sit e. gr. numerus graduum in Arcu IL = 100:
 erit IAL: 4 Rect. = 100: 360.



EV-

E V C L I D I S

E L E M E N T O R V M

L I B E R V I I

* * * * *

DEFINITIONES.

1. *Vnitas* est, secundum quam vnumquodque eorum, quae sunt, vnum dicitur.

2. *Numerus* autem, ex vnitatibus constans multitudo.

3. *Pars* est *numerus numeri*, minor maioris, quum minor metitur maiorem.

* Omnis pars ab eo numero nomen sibi sumit, per quem ipsa numerum, cuius est pars, metitur: vt 4 dicitur pars tertia numeri 12, quia eum metitur per 3. Hinc 3 dicitur eadem pars numeri 6 quae 5 numeri 10, quia 3 & 5 ipsos 6 & 10 per eundem numerum 2 metiuntur, vel in ipsis aequae multitudines continentur.

4. *Partes* autem, quando non metitur.

* Partes quaecunque nomen accipiunt a duobus illis numeris, per quos maxima communis duorum numerorum mensura vtrumque eorum metitur; vt 10 dicitur $\frac{2}{3}$ numeri 15, eo quod maxima communis mensura, nempe 5 metitur 10 per 2, & 15 per 3. Eadem partes est numerus 4 numeri 6, quae numerus 10 ipsius 15, si numeri 4, 10 aequali multitudine continent duo numeros 2, 5, qui ipsorum 6, 15 eadem pars sunt.

5. *Multiplex* est maior minoris, quando minor maiorem metitur.

L 3

6. *Pars*

6. *Par numerus* est, qui bifariam diuiditur (vt 8).

7. *Impar* vero, qui bifariam non diuiditur, vel qui a pari numero vnitate differt (vti 9).

8. *Pariter par* numerus est, quem par numerus per parem numerum metitur (vti 16).

9. *Pariter* vero *impar* est, quem par numerus per numerum imparem metitur (vt 6).

10. *Impariter* vero *impar* numerus est, quem impar numerus per numerum imparem metitur (vt 15).

11. *Primus numerus* est, quem vnitas sola metitur (vt. 3).

12. *Primi inter se numeri* sunt, quos sola vnitas, communis mensura, metitur (vt 1, 7).

13. *Compositus numerus* est, quem numerus aliquis metitur (9).

14. *Compositi inter se numeri* sunt, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur (6, 8).

15. *Numerus numerum multiplicare* dicitur, quando, quot vnitates sunt in ipso, toties componitur multiplicatus, & aliquis gignitur.

* Numerum A per numerum B multiplicandum esse, sic indicamus, vt literas A, B coniungamus. Hinc AB notat numerum productum ex A per B multiplicato. In numeris productus scribitur sic 2×3 .

16. Quando duo numeri sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus est *planus* appellatur; *Latere* vero *ipsius*, numeri sese multiplicantes. (10 est planus, latera eius sunt 2 & 5).

17. Quan-

17. Quando autem tres numeri sese multiplicantes aliquem fecerint: factus *solidus* appellatur; *latera* vero *ipsius*, numeri sese multiplicantes. (30 est solidus, latera ipsius sunt 2, 3, 5).

18. *Quadratus numerus* est, qui aequaliter aequalis; vel qui sub duobus aequalibus numeris continetur.

* Sit A latus: quadratus numerus, id est AA, sic scribitur A^2 . Item 9, id est 3×3 , sic 3^2 .

19. *Cubus* vero, qui aequaliter aequalis aequaliter; vel qui sub tribus aequalibus numeris continetur.

* Sit A latus: cubus numerus scribitur sic A^3 , id est AAA. Item $3 \times 3 \times 3$, id est 27, est cubus, qui sic designatur 3^3 .

20. *Numeri proportionales* sunt, quando primus secundi, & tertius quarti aeque multiplex est, vel eadem pars, vel eadem partes. (* e. gr. $12 : 3 = 8 : 2$; $2 : 6 = 5 : 15$; $10 : 15 = 12 : 18$; $8 : 6 = 16 : 12$).

21. *Similes plani & solidi numeri* sunt, qui latera habent proportionalia.

* E. gr. $6 \sim 24$; quia $2 : 3 = 4 : 6$. Item solidus 30 \sim solido 240; quia $2 : 3 = 4 : 6$ & $3 : 5 = 6 : 10$.

22. *Perfectus numerus* est, qui suis ipsius partibus est aequalis.

* Sic $6 = 1 + 2 + 3$ est perfectus. Numerus vero, qui suis ipsius partibus minor est *abundans* appellatur, ut 12. Qui vero maior, *diminutus*, ut 15.

* 23. *Numerus numerum metiri* dicitur per illum numerum, a quo multiplicatus, illum producit.

In diuisione unitas est ad quotientem, ut diuidens ad diuifum. Nota, numerum alteri lineola interiecta subscriptum diuifionem denotare. Sic $\frac{A}{B}$ est A diuifus per B, item $\frac{CA}{B}$ est C in A diuifus per B.

* *Postulata.*

1. Postuletur, cuilibet numero quotlibet sumi posse aequales, vel multiplices.
2. Quolibet numero sumi posse maiorem.
3. Additio, subtractio, multiplicatio, diuifio, extractionesque radicum seu laterum ex numeris quadratis seu cubis concedantur etiam, tanquam possibilia.

* *Axiomata.*

1. Quicquid conuenit vni aequalium numerorum, conuenit & reliquis aequalibus numeris.
2. In omni additione, subtractione, multiplicatione, vel diuisione toti numero singulae suae partes simul sumtae substitui possunt.
3. Qui numeri aequalium numerorum, vel eiusdem, eadem partes fuerint, aequales inter se sunt.
4. Quorum idem numerus, vel aequales, eadem partes fuerint, aequales inter se sunt.
5. Maioris pars parte eadem minoris maior est.
6. Unitas omnem numerum per unitates, quae in ipso sunt, hoc est per ipsummet numerum, metitur.
7. Omnis numerus se ipsum metitur per unitatem.
8. Si numerus, numerum multiplicans, aliquem produxerit: multiplicatus metietur eundem per unitates in multiplicante, vel per ipsum multiplicantem (def. 15. & 23).

Hinc nullus numerus primus planus est, vel solidus, vel quadratus, vel cubus.

9. Si

9. Si numerus, numerum metiens, ab eo, per quem metitur, multiplicetur: illum, quem metitur, producit.

10. Numerus, quocunque numeros metiens, compositum quoque ex ipsis metitur.

11. Numerus, quemcunque numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

12. Numerus metiens totum, & ablatum, metitur & reliquum.

13. Numerus numerum metiens eodem maior esse non potest.

14. Numerus, pariter metiens totum, dimidium quoque metitur.

15. Quae rationes eidem eadem sunt, & inter se sunt eadem (def. 20).

16. Si quatuor numeri proportionales sunt, inesse quoque sunt proportionales.

PROP. I. THEOR.

B.....F..H.A Si duobus numeris inae-
 D...G...C qualibus AB, CD expositis, de-
 E--- tracto semper minore de ma-
 iore (CD de BA, & reliquo
 FA de DC), reliquus GC minime metiatur
 praecedentem, quoad assumpta fuerit unitas HA:
 numeri a principio positi AB, CD primi inter
 se erunt.

Si negas: metietur^a eos aliquis numerus,
 qui sit E. Quia CD metitur^b BF: & E ipsam
 BF^c metietur, ergo &^d reliquum FA. Sed FA
 metitur^e DG: ergo &^f E metitur DG, ideo-
 que etiam reliquum^g GC. Sed GC metitur

L 5

^a FH:

^a FH: quare E quoque^v metitur FH. Metiebatur autem E totum FA: ergo metitur & reliquam^b HA vnitatem. Ergo E maior non
^{a. 13. ax. 7.}
^{c. 2. def. 7.} est^a vnitatem. Q. E. A. 2.

PROP. II. PROBL.

Duobus numeris datis AB, CD, non primi inter se, maximam eorum communem mensuram inuenire.

A.....B *Cas. 1.* Si CD metitur AB: quum
 C...D etiam se ipse metiatur; erit CD
 ipforum CD, AB communis mensura, & maxima quidem, quia nullus maior ipso CD eum metitur.

A....E.....B *Cas. 2.* Si CD non metitur AB; detrahe semper minorem de maiore, CD de
 C...F....D AB, quoties fieri potest, &
 G--- reliquum AE de CD similiter, & sic porro, quoad relinquatur aliquis numerus CF metiens praecedentem AE. Dico fore CF numerum, qui maxima est communis mensura ipforum AB, CD.

Nam primo, semper relinqui aliquem CF, qui metiatur praecedentem, & qui non sit
^{a. 1. 7.} vnitatem, patet ex eo, quod, si secus esset, a numeri AB, CD primi inter se essent; contra hypothesin. Deinde quia CF metitur AE,
^{9. n. ax. 7.} AE vero FD: metietur & ^a CF ipsum FD.
^{1. 7. ax. 7.} CF autem se ipsum quoque^a metitur: ergo
^{a. 10. ax. 7.} CF metitur^a CD. At CD ipsum BE metitur; ergo^a CF eundem BE, ideoque^a & AB meti-

metitur. Quare CF est communis mensura.
 Si maximam esse negas: sit maior quaedam G.
 Ergo G metiens CD, metitur² BE, & ¹ reli-
 quum AE, ipsumque² DF; proinde & reli-
 quum¹ CF, maior minorem. Q. E. A^m. Qua-
 re numerus CF est maxima communis mensu-
 ra datorum. Q. E. F.

Coroll.

Hinc numerus, duos numeros metiens, & ma-
 ximam eorum communem mensuram metitur.

PROP. III. PROBL.

*Tribus datis numeris A, B, C, non primis
 inter se, maximam ipsorum communem mensu-
 ram inuenire.*

1. Sume duorum A, B maximam
 A 8 communem mensuram D: & si D me-
 B 6 titur C, erit communis trium mensu-
 C 4 ra, & maxima quidem. Si qua enim
 D 2 esset maior: metiretur eadem¹ nume-
 rum D. Q. E. A^z.

2. Si vero D non metitur C: su-
 A 18. me ipsorum C, D maximam¹ com-
 B 12. munem mensuram E; quod fieri por-
 C 4. est, quia C, D primi inter se esse ae-
 D 6. queunt, utpote quos idem numerus
 E 2. metietur, qui ipsos A, B, C metiri
 ponitur. Dico E esse maximam communem
 mensuram trium A, B, C.

Nam E metiens D, metitur quoque¹ A, &
 B; & quia¹ metitur C, metitur singulos A, B, C.
 At nullus maior quam E eosdem metitur. Si
 quis

quis enim maior eos metiretur : idem moti-
 q. cor. 2. 7. retur^r etiam D & C, ideoque^r etiam E. Q.
 7. 13. 22. 7. E. A^r.

Corollar.

Hinc, si unus numerus tres metiatur : &
 ipsorum maximam communem mensuram metitur.

Schol.

Eodem modo & pluribus numeris datis, ma-
 ximam communem mensuram inueniemus.

PROP. IV. THEOR.

*Omnis numerus BC omnis numeri A, minor
 maioris, vel pars est vel partes.*

Cas. 1. Si A, BC primi sunt inter se.
 A.....
 B...C Quia unaquasque unitatum, quas
 3. def. & 6. ax. 7. continet BC, est^v pars numeri A : BC
 ipsius A partes esse patet. Q. E. D.

Cas. 2. Si A & BC non sunt
 A..... primi inter se : aut BC metitur A,
 B..E..F..C & tunc^p pars ipsius est ; aut non
 3. def. 7. D.. metitur. Quo in casu sume eo-
 2. 7. rum maximam^x communem mensuram D, &
 1. 12. 7. diuide BC in numeros BE = EF = FC = D.
 Et quia D est^p pars ipsius A : erit^v quoque
 tam BE, quam EF, quam FC pars ipsius A, &
 ergo totus BC partes ipsius A erit. Q. E. D.

PROP. V. THEOR.

*Si numerus A numeri BC pars
 fuerit ; & alter D alterius EF
 eadem pars : & uterque A + D
 utriusque BC + EF eadem pars
 erit, quae unus A unius BC.*

Nam

Nam diuifus^a fit BC in numeros BG, GC ipſi *a.* 3. poſt. 7.
 A, EF vero in numeros EH, HF ipſi D aequa-
 les: & erit multitudo^a numerorum BG, GC *a.* 1. def. 7.
 aequalis multitudini numerorum EH, HF; & *& hyp.*
 ergo aequalis multitudini numerorum BG
 + EH, GC + HF. Sed BG + EH =^β A *β.* 2. ex. 2.
 + D = GC + HF; & BG + EH + GC +
 HF = BC + EF: ergo BC + EF conſtat ex
 tot numeris, ipſis BG + EH, vel A + D ae-
 qualibus, ex quot ipſi BG, vel A aequalibus
 conſtat BC. Hinc ipſos BC + EF & BC nu-
 meri A + D & A per eundem numerum *γ.* 15. & 23.
 metiuntur. Ergo^δ A + D numeri BC + EF *def.* 7.
 eadem pars eſt, quae A ipſius BC. Q. E. D. *δ.* 3. def. 7.

PROP. VI. THEOR.

A...G...B Si numerus AB numeri C
 C..... partes fuerit; & aliter DE al-
 D....H....E terius F eadem partes: &
 F..... uterque AB + DE vtriusque
 C + F eadem partes erit,
 quae vnus AB vnus C.

Diuide AB in ipſius C partes AG, GB; DE
 vero in ipſius F partes DH, HE. Quia AB
 tot continet partes ipſius C, ^a quot DE conti- *a.* hyp.
 net partes ipſius F: eſt multitudo partium
 AG, GB = multitudini ipſarum DH, HE. Et
 quum^a eadem pars ſit AG ipſius C, quae DH
 ipſius F: & uterque AG + DH vtriusque C *ε.* 5. 7.
 + F eadem pars eſt, quae AG ipſius C. Simili
 ratione GB + HE ipſius C + F eadem pars
 eſt, quae GB ipſius C. Quare quam AG +
 DH

A...G...B DH + GB + HE = AB +
 C..... DE, & AG + DH = GB +
 D....H....E HE, & multitudo ipforum AG
 F..... + DH, GB + HE aequalis mul-
 titudini ipforum AG, GB: pa-
 ret, AB + DE vtriusque C + F eadem esse
 partes, quas AB ipfius C. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.

A...E..B Si numerus AB nu-
 G....C.....F....D meri CD fuerit pars,
 quae ablatus AE ablati
 CF: & reliquus EB reliqui FD eadem pars
 erit, quae totus AB totius CD.

Quae enim pars est AE ipfius CF, eadem sit
 EB ipfius CG: ergo & * AB ipfius FG eadem
 pars erit. Sed AB ipfius CD eadem pars ⁹
 erat, quae AE ipfius CF: ergo AB ipfius FG
 eadem pars est, quae ipfius CD. Quum er-
 go ¹ FG = CD, & hinc * CG = FD: patet ¹
 esse EB ipfius FD eandem partem, quae AE
 ipfius CF, vel quae est AB ipfius CD. Q. E. D.

PROP. VIII. THEOR.

A.....L.....E....B Si numerus
 C.....F.....D AB numeri CD:
 G.....M..K.....N..H fuerit partes,
 quae ablatus
 AE ablati CF: & reliquus EB reliqui FD eae-
 dem partes erit, quae totus AB totius CD.

Ponatur enim numero AB aequalis GH:
 ergo GH numeri CD eadem partes est ¹, quae
 AE ipfius CF. Dividatur GH in partes GK,
 KH

KH numeri CD, AE verb in partes AL, LE numeri CF: aequalis ergo erit multitudo partium GK, KH multitudini partium AL, LE. Et quia² AL ipsius CF eadem pars est, ^{g. constr. & hyp.} quae GK ipsius CD; & $CD > CF$: erit^o ^{5. ax. 7.} $GK > AL$. Sume $GM = AL$. Quae ergo^o ^{7. 7.} pars est GK ipsius CD, eadem est GM ipsius CF, & eadem ergo^o MK ipsius FD. Sume $KN = LE$: & eodem modo patet, quae pars est KH numeri CD, eandem esse NH ipsius FD. Quare quae partes est $GK + KH$, id est AB, ipsius CD, eadem partes est $MK + NH$, id est EB, ipsius FD. Q. E. D. ^{g. 3. ax. 1.}

PROP. IX. THEOR.

A.... Si numerus A numeri BC
B....G....C pars fuerit, & alter D alterius EF eadem pars: & permutando, quae pars est vel
D..... partes primus A tertii D, eadem erit pars vel eadem partes & secundus BC, quarti EF.

Sit $A < D$, & sit $BG = GC = A$, & $EH = HF = D$: multitudo ergo partium BG, GC aequalis erit multitudini partium EH, HF. Et quia $BG = GC$, & $EH = HF$: quae pars est BG ipsius EH vel partes, eadem^o pars erit ^{1. ax. 7.} & GC ipsius HF vel eadem partes. Ergo^o ^{5. & 6. 7.} quae pars vel partes est BG, id est A ipsius EH, id est D, eadem pars vel eadem partes erit $BG + GC$, id est BC, ipsius $EH + HF$, id est EF. Q. E. D.

* Schol.

* Schol.

Si ergo duo numeri duos numeros aequaliter metiuntur: illi cum his eandem rationem habent.

PROP. X. THEOR.

A..G..B

C.....

D.....H.....E

F.....

Si numerus AB numeri C partes fuerit, & alter DE alterius F eadem partes: & permutando, quae partes est primus AB tertii DE, vel pars, eadem partes erit & secundus C quarti F, vel eadem pars.

v. hyp.
φ. constr.
& hyp.
x. 9. 7.

ψ. 5. vel 6. 7.

α. dem.

Diuide AB in partes numeri C, quae sint AG, GB, & DE in partes ipsius F, quae sint DH, HE: erit multitudo partium AG, GB =
v multitudini partium DH, HE. Et quia φ AG ipsius C eadem pars est, quae DH ipsius F: erit x AG ipsius DH eadem pars vel eadem partes, quae C ipsius F. Similiter GB ipsius HE erit eadem pars vel eadem partes, quae C ipsius F. Quare ψ erit AG + GB, id est AB, ipsius DH + HE, id est DE, eadem pars vel partes eadem, quae AG ipsius DH, hoc est α, quae C ipsius F. Q. E. D.

PROP. XI. THEOR.

A....E..B

C.....F...D

Si fuerit ut totus AB ad totum CD, ita ablatum AE ad ablatum CF: & reliquus EB ad reliquum FD erit, ut totus AB ad totum CD.

α. 20. def. 7.

Quia enim α quae pars vel partes est AB ipsius CD, eadem pars vel eadem partes est AE

AE ipsius CF: etiam EB ipsius FD eadem pars vel eadem partes erit^β, quae AB ipsius CD. *β. 7. vel 8. 7.*
Ergo * $EB : FD = AB : CD$. Q. E. D.

* Si AB & AE ipsorum CD, CF aequae sunt multiplices: CD ipsius AB eadem pars est, quae CF ipsius AE. Quare demonstratio etiam ad hunc casum applicari potest, per ax. 16. 7; quod & in sequentibus notandum.

PROP. XII. THEOR.

Si quotcunque numeri proportionales fuerint ($A : B = C : D$):
ut unus antecedentium A ad unum consequentium B, ita erunt omnes antecedentes
A + C ad omnes consequentes B + D.

Quia enim, γ quae pars est A ipsius B vel *γ. 20. def. 7.*
partes, eadem pars eademue partes est C ipsius
D: quae pars vel partes est A ipsius B, eadem
pars vel eadem partes^δ est A + C ipsius B + *δ. 5. vel 6. 7.*
D; ideoque γ est $A : B = A + C : B + D$.
Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

Si quatuor numeri proportionales fuerint ($A : B = C : D$):
& permutando proportionales erunt ($A : C = B : D$).

Quia enim, ϵ quae pars vel partes est A ip- *ε. 20. def. 7.*
sius B, talis talesue est C ipsius D: & permutando^ζ quae pars vel partes est A ipsius C, ta- *ζ. 9. 7. vel*
lis vel tales est B ipsius D; & ergo ϵ $A : C =$ *10. 7.*
 $B : D$. Q. E. D.

M

* Schol.

* *Schol.* Ergo si quatuor numeri proportionales sunt: etiam conuertendo vel diuidendo proportionales erunt; per hanc & 11. 7.

PROP. XIV. THEOR.

A.....D.... *Si fuerint quotcunque numeri A, B, C, & alii ipsis multitudine aequales D, E, F, quibini sumantur & in eadem ratione* (A : B = D : E, & B : C = E : F): *etiam ex aequo in eadem ratione erunt* (A : C = D : F).

* 13. 7. Nam permutando * A : D = B : E = C : F, & iterum permutando A : C = D : F. Q. E. D.

PROP. XV. THEOR.

A. D.. *Si unitas A numerum aliquem BC metiatur; alter autem numerus D aequaliter metiatur alium aliquem EF: & permutando, unitas A tertium numerum D aequaliter metietur, atque secundus BC quartum EF.*

Diuide BC in suas vnitates BG, GH, HC, & EF in numeros ipsi D aequales, puta EK, KL, LF. Et quoniam BG = GH = HC, & EK = KL = LF; vnitatum autem multitudo =⁹ multitudini numerorum EK, KL, LF: erit BG : EK = GH : KL = HC : LF; & BG : EK, id est A : D, = BC : EF. Ergo * A numerum D aequaliter metitur atque BC ipsum EF. Q. E. D.

PROP.

PROP. XVI. THEOR.

Si duo numeri A, B sese multiplicantes fecerint aliquos C, D: facti ex ipsis C, D inter se aequales erunt.

Si enim A ipsum B multiplicans produxit C: ^λ metitur B ipsum C per vnitates, quae sunt ^λ. 8. ax. 7. in A. Metitur autem & E vnitas numerum A per vnitates ^μ quae sunt in A. Ergo B ipsum C metitur aequaliter, ac E vnitas ipsum A. ^μ. 6. ax. 7. Hinc ^ν E ipsum B aequaliter metitur ac A ipsum C. ^ν. 15. 7. Similiter si B ipsum A multiplicans produxit D: E ipsum B metitur aequaliter, ac A ipsum D. Quare quum ^ξ A ipsius C eadem pars ^ξ sit quae ipsius D: patet ^ξ esse C ^ξ. 3. def. 7. ^ξ. 4. ax. 7. $\equiv D$. Q. E. D.

* Cor. 1. Multiplicans metitur factum per multiplicatum.

* Cor. 2. Si numerus B numerum C metiatur: & ille A, per quem metitur, eundem C metietur per ipsum numerum metientem B.

PROP. XVII. THEOR.

Si numerus A duos numeros B, C multiplicans fecerit aliquos D, E: facti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicati (D: E = B: C).

Nam B metitur D ^π per vnitates in A. Metitur autem & 1 numerum A per vnitates in A. Ergo 1 ipsum A aequaliter metitur ac B ipsum D, & hinc ^π 1: A = B: D. Eadem ratione 1: ^π. 8. ax. 7. A = C: E. Quare ^π B: D = C: E, & permu- ^π. 20. def. 7. tando ^π B: C = D: E. Q. E. D. ^π. 13. 7.

M 2

* Cor.

* Cor. In multiplicatione est ut unitas ad multiplicantem A, ita multiplicatus B ad factum D.

PROP. XVIII. THEOR.

$A \ 3 \ B \ 4$ Si duo numeri A, B numerum
 $C \ 5$ aliquem C multiplicantes, fecerint
 $D \ 15 \ E \ 20$ aliquos D, E: facti ex ipsis eandem
 rationem habebunt, quam multipli-
 cantes ($D : E = A : B$).

Quia enim $AC =^r CA = D$, & $BC = CB = E$: erit $D : E =^u A : B$. Q. E. D.

τ. 16. 7.
 υ. 17. 7.

PROP. XIX. THEOR.

$A \ 6$ Si quatuor numeri proportionales fuerint. ($A : B = C : D$): qui
 $B \ 4 \ AD \ 12$ ex primo & quarto fit numerus,
 $C \ 3 \ BC \ 12$ aequalis erit ei, qui fit ex secundo
 $D \ 2 \ AC \ 18$ & tertio ($AD = BC$). Et si numerus AD, qui fit ex primo A & quarto D, aequalis fuerit ei BC, qui fit ex secundo B & tertio C: quatuor numeri proportionales erunt ($A : B = C : D$).

1. Nam fit alius AC factus ex A & C: erit
 $\phi. \ 18. \ 7. \ AC : AD =^{\phi} C : D = A : B$. Rursus $AC : BC =^{\chi} A : B$. Ergo $AC : AD =^{\psi} AC : BC$, &
 $\chi. \ 17. \ 7. \ =^{\chi} A : B$.
 $\psi. \ 15. \ ax. \ 7. \ hinc \ AD =^u BC$. Q. E. D.
 $\omega. \ 3. \ 4. \ ax. \ 7.$

2. Quia $C : D =^{\phi} AC : AD =^u AC : BC$;
 $\alpha. \ 1. \ ax. \ 7. \ \& \ AC : BC =^{\chi} A : B$: erit $A : B =^{\psi} C : D$.
 Q. E. D.

PROP.

PROP. XX. THEOR.

$A \ 4$ *Si tres numeri proportionales fuerint*
 $B \ 6 \ D \ 6$ *($\div\div A, B, C$): qui ab extremis*
 $C \ 9$ *fit numerus, aequalis erit ei, qui fit*
 a medio ($AC = B^2$). Si autem
qui ab extremis fit AC , aequalis fuerit ei B^2 , qui
a medio: tres numeri proportionales erunt ($\div\div$
 A, B, C).

1. Ponatur ipsi $B = D$. Quia ergo $A : B = D : C$: erit $^A AC = BD = ^\gamma B^2$. Q. E. D. β . 19. 7. γ . 18. def. 7.
2. Quia $AC = B^2 = ^\gamma BD$: erit $^A A : B = D : C = B : C$. Q. E. D.

PROP. XXI. THEOR.

$A \ 10 \ C \ 5$ *Minimi numeri C, D omnium*
 $B \ 6 \ D \ 3$ *eandem cum ipsis rationem habentium,*
 ear, qui eandem rationem
habent, A, B aequaliter metiuntur, maior C
maiorem A , & minor D minorem B .

1. Dico C ipsum A metiri, quia eius partes non est. Si enim fieri potest, sit C partes ipsius A . Quia est $C : D = A : B$: erit $^A D$ ip- β 20. def. 7. & 9. 10. 7
- sus B eadem partes, quae C ipsius A . Quot igitur in C sunt partes ipsius A , tot & in D erunt partes ipsius B . Sint E, F partes ipsius A in C , & G, H partes ipsius B in D . Quia ergo $E = F$, & $G = H$: erit $E : G = ^A F : H$. α . 1. ax. 7.
- Et quia ipsorum E, F multitudo aequalis est ipsorum G, H multitudini: erit $E : G = ^S C : D$. γ . 12. 7.
- Sed $E < C$, & $G < D$. Ergo C, D non sunt minimi eorum, qui eandem rationem habent; contra hypothesin. Non est ergo C

M 3

partes

A 10 C 5 partes ipsius A , nec D ipsius B .
 Quare quum C ipsius A , & D
 4. 4. 7. B 6 D 3 ipsius B pars sit: metitur C ip-
 3. 3. def. 7. sum A , & D ipsum B .

2. Quia autem $C : D = A : B$, & $C : A =$
 1. 20. def. 7. $D : B$, & C pars ipsius A : erit & D eadem
 pars ipsius B . Quare C & D ipsos A , B aequa-
 liter \supset metiuntur. Q. E. D.

* Cor. Minimi numeri eandem rationem ha-
 bentium eosdem metiuntur, antecedens antecede-
 dentes, & consequens consequentes.

PROP. XXII. THEOR.

Si sint tres numeri A , B , C , &
 alii ipsis multitudine aequales D , E ,
 F , qui bini sumantur & in eadem
 C 3 F 6 ratione; sit autem perturbata co-
 rum proportio ($A : B = E : F$, & $B : C = D : E$)
 etiam ex aequo in eadem ratione erunt ($A : C$
 $= D : F$).

11. 19. 7. Est enim $\ast AF = BE = CD$. Ergo $\ast A : C$
 $= D : F$. Q. E. D.

PROP. XXIII. THEOR.

Numeri primi inter se, A , B , minimi sunt
 omnium eandem cum ipsis rationem habentium.

Si fieri potest, sint C , D , eandem rationem
 habentes quam A , B , & ipsis A , B minores, mi-
 1. 21. 7. nimi omnium. Ergo $\wedge C$ ipsum A aequaliter
 metietur, ac D ipsum B . Iam quoties C ip-
 11. 2. cor.
 16. 7. sum A metitur, tot unitates sint in E : ergo &
 D ipsum B metietur per numerum E . Quare \ast
 etiam

etiam E metietur A per C, & E ipsum B per D. Quum itaque idem E duos A, B metiatur: A, B non erunt primi inter se; contra α . 12. def. 7. hypothesin. Minimi ergo sunt A, B. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.

Minimi numeri A, B, eorum, qui eandem cum ipsis rationem habent, primi inter se sunt.

Si negas: metiatur⁶ eos numerus C, ipsum ξ . 12. def. 7. Anempe per numerum aliquem D, & alterum B per E. Ergo^o $CD = A$, & $CE = B$; & in- α . 9. ax. 7. de $A : B = D : E$. Quum autem sit $D < A$, π . 18. 7. & $E < B$: non erunt A, B minimi; contra hypothesin. Ergo A, B primi inter se sunt. Q. E. D.

PROP. XXV. THEOR.

A 6 *Si duo numeri A, B primi inter se fue-*
B 5 *rint, qui unum ipsorum A metitur nume-*
C 3 *rus C, ad reliquum B primus erit.*

Si enim B, C inter se primi non sint: metiatur eos numerus D. Idem D metietur⁶ ξ . 11. ax. 7. ipsum A. Ergo A, B non^o erunt primi inter α . 12. def. 7. se; contra hypothesin. Ergo C ad B primus est. Q. E. D.

PROP. XXVI. THEOR.

A 2 B 3 *Si duo numeri A, B ad aliquem*
C 5 *numcrum C primi fuerint: & qui*
D 6 *sit ex ipsis D ad eum C primus erit.*

Si negas: metiatur ipsos C & D idem aliquis E. Ergo^o E & A primi inter se sunt. π . 25. 7.

M 4

Me-

u. 2. cor.

16. 7.

φ. 9. ax. 7.

x. hyp.

ψ. 19. 7.

ω. 23. 7.

α. cor. 21. 7.

A 2 B 3

C 5

D 6

Metiatur autem E ipsum D per numerum F : ergo γ F ipsum D

quoque metietur per E ; & $EF =$

φ D $= \alpha$ AB. Quare ψ E : A $=$

B : F. Quum autem E, A primi inter se, ideo-

que ω minimi sint : E ipsum B ω metietur. Me-

titur autem E quoque ipsum C : ergo B, C non

erunt primi inter se ; contra hypothesin. Qua-

re D & C primi inter se sunt. Q. E. D.

PROP. XXVII. THEOR.

A... B... Si duo numeri A, B primi inter se
A².... fuerint : qui sit ab uno ipsorum A²
D... ad reliquum B primus erit.

Sit enim ipsi A $=$ D : erunt & D, B primi
β. 26. 7. inter se ; & ergo β AD id est γ A² ad B primus
γ. 18. def. 7. erit. Q. E. D.

PROP. XXVIII. THEOR.

A 3. B 5 Si duo numeri A, B ad duos nu-
E 15 meros C, D, uterque ad utrumque
C 2 D 4 primi fuerint : & qui sunt ex ipsis
F 8 E, F inter se primi erunt.

α. 26. 7. Nam quia A, B ad C primi sunt : E^δ etiam
ad C primus erit. Eadem ratione E, D inter
se primi sunt. Quare quum C, D ad E primi
sint : erunt & δ F ac E primi inter se. Q.
E. D.

PROP.

PROP. XXIX. THEOR.

A^2 B^3 *Si duo numeri A, B primi inter*
 A^2 B^2 *se fuerint, & uterque se ipsum*
 A^3 B^3 *multiplicans faciat aliquos A^2, B^2 :*
facti ex ipsis A^2, B^2 primi inter se
erunt; & si numeri a principio positi A, B, eos
qui facti sunt A^2, B^2 multiplicantes, aliquos A^3, B^3
faciant: & ipsi inter se primi erunt; & sem-
per circa extremos hoc continget.

Quia enim A^2, B primi sunt: erunt & A^2, B^2 primi.
 Iam quum & A, B^2 primi sint, & ergo duo A, A^2 ad duos B, B^2 uterque ad utrumque primi sint: erunt quoque & A^3, B^3 primi. Q. E. D.

PROP. XXX. THEOR.

A^3 B^5 *Si duo numeri A, B primi inter*
 $A+B$ B^8 *se fuerint: & uterque simul $A+B$*
ad utrumque ipsorum & A & B pri-
mus erit. Quod si uterque simul $A+B$ ad unum
aliquem ipsorum sit primus: & numeri A, B a
principio positi inter se primi erunt.

1. Si negas, $A+B$ ad A vel B primum esse: metiatur ipsos $A+B$ & A aliquis C; qui ergo & B metietur. Quare A & B non sunt primi inter se; contra hyp.

2. Si negas A, B primos esse: metiatur eos aliquis C. Quum ergo idem C ipsum $A+B$ & B metiatur: $A+B$ ad neutrum ipsorum A, B primus erit; contra hyp.

PROP. XXXI. THEOR.

A 3 B 7 *Omnis primus, numerus A ad omnem numerum B, quem non metitur, primus est.*

Si negas: metiatur eos aliquis C praeter unitatem. Et quia A non metitur B: erit C diuersus a numero A. Ergo quum A metiatur aliquis, qui nec vnitas nec ipsi A idem est:

u. def. 7. A primus non erit; contra hyp.

PROP. XXXII. THEOR.

A 2 B 6 *Si duo numeri A, B sese multiplicantes, aliquem faciant; cum vero AB, qui ex ipsis fit, metiatur aliquis numerus primus C: & vnum ipsorum A, B, qui a principio positi sunt, metietur.*

AB 12
C 3
D 4

Nam C ipsum A non metiatur: ergo * C & A primi inter se sunt. Metiatur autem C ipsum AB per D: erit $CD = ^\lambda AB$, ideoque $C : A = ^\mu B : D$. Quare quum C, A minimi sint eorum², qui rationem C: A habent: C ipsum B² metietur.

x. 31. 7.
λ. 9. ax. 9.
μ. 19. 7.
ν. 23. 7.
ξ. cor. 21. 7.

Similiter demonstrabitur, si C ipsum B non metiretur, metiri ipsum A. Quare C metitur vnum ipsorum A, B. Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

Omnem numerum compositum A primus aliquis numerus metitur.

Quia

A 12 Quia enim A compositus est: meti-
 B 4 tur eum^o aliquis B, qui si primus sit, o. 13. def. 7.
 C 2 patet propositio. Si vero B etiam com-
 positus est: metiatur eum C, qui etiam
 metietur^r ipsum A. Quare si hic C nondum^r 11. ax. 7.
 primus est, metietur ipsum alius, & sic pro-
 grediendo tandem ad primum peruenietur,
 qui metietur tam antecedentem quam A. Nisi
 enim tandem ad primum perueniretur: meti-
 rentur ipsum A infiniti numeri, quorum alter
 altero minor. Q. E. A^e. g. 2. def. 7.

Aliter. Sit C minimus omnium ipsum A
 metientium: erit idem primus. Si enim non:
 metiatur illum numerus $D < C$; quare quum
 idem D metiatur etiam^r A, non est C minimus
 metientium ipsum A; contra hyp.

PROP. XXXIV. THEOR.

*Omnis numerus A vel primus est, vel eum
 primus aliquis numerus metitur.*

Si enim A primus est: manifesta est pro-
 positio. Sin A compositus: metietur eum
 aliquis^r primus. Ergo A aut primus est, aut^r 33. 7.
 eum primus metitur. Q. E. D.

PROP. XXXV. PROBL.

A 6 B 15 C 21 *Numeris quoscunque A,*
 D 3 *B, C datis, inuenire mini-*
 E 2 F 6 G 7 *mos omnium, qui eandem*
cum ipsis rationem habeant.

Si ipsi A, B, C primi inter se sunt: minimi
 iam erunt^r omnium eandem rationem haben- 7. 23. 7.
 tium.

Si

α. 3. 7.

A 6 B 15 C 21
D 3
E 2 F 5 G 7

Si vero non : fume^o
ipforum maximam com-
munem mensuram D, per
quam diuide ipsos A, B, C.
Numeri E, F, G, per quos D ipsos A, B, C me-
titur, erunt quaesiti.

φ. 2. cor.
16. 7.

z. sch. 9. 7.

ψ. 21. 7.

α. 9. ex. 2.

α. 19. 7.

β. 20. def. 7.

Nam quia vnusquisque ipforum E, F, G
vnumquemque ipforum A, B, C per D^o me-
titur, id est aequaliter : ipsi E, F, G in ea-
dem^z sunt ratione cum numeris A, B, C. Di-
co etiam E, F, G minimos fore eandem cum
A, B, C rationem habentium. Si enim negas :
erunt alii H, K, L, ipsis E, F, G minores, minimi
eandem cum A, B, C rationem habentium.
Ergo^ψ H, K, L ipsos A, B, C aequaliter metien-
tur, id est per eundem numerum, qui sit M.
Igitur M metietur^φ ipsum A per H, ipsum B
per K, & ipsum C per L; & MH =^α A. Sed
est etiam ED =^α A. Ergo ED = MH, &
E : H =^α M : D. Sed E > H : ergo M >^β D.
Quare quum M ipsos A, B, C metiatur : non
erit D maxima ipforum A, B, C mensura ; con-
tra hyp. Ergo E, F, G minimi sunt eandem
cum A, B, C rationem habentium. Q. E. D.

PROP. XXXVI. PROBL.

*Duobus numeris A, B datis, inuenire mini-
mum numerum, quem metiantur.*

1. Sint dati A, B primi inter se.
A 3 B 4
AB 12 Multiplicetur A per B, factus AB
erit quaesitus.

Nam

Nam vterque A, B metitur γ AB. Est autem & AB minimus eorum, quem A & B metiuntur. Si negas: metiantur illi numerum $C < AB$; & A quidem ipsum C metiatur per D, B vero per E. Ergo erit $AD =^{\delta} C =^{\delta} BE$, & hinc $A : B =^{\delta} E : D$. Sunt autem A, B primi inter se, ideoque minimi ζ : ergo B α metietur ipsum D. Sed numeri B, D ipsum A multiplicantes fecerunt ipsos AB, C: ergo erit $B : D = AB : C$, & ideo AB metietur ipsum C, minor maiorem. Q. E. A^x.

A 4 B 6
C 2 D 3
AD 12

2. Non sint A, B primi inter se: sume λ minimos C, D in eadem ratione cum A, B: & multiplica extremos vel medios per se inuicem. Factus AD erit quaesitus.

Nam quia A per D, & B per C multiplicatus eundem AD producit: tam A, quam B eundem AD metietur. Dico etiam AD minimum esse. Si enim non: metientur A, B aliquem E minorem quam AD, & metiatur quidem A ipsum E per F, B vero per G. Quare erit $AF =^{\zeta} E =^{\zeta} BG$, & $A : B =^{\mu} G : F$. Sed $A : B =^{\mu} C : D$. Ergo $C : D =^{\mu} G : F$. Quia autem C, D minimi sunt: D ipsum F metietur. Sed $D : F =^{\epsilon} AD : AF$ id est E: igitur AD metietur E, maior minorem. Q. E. A^o.

PROP. XXXVII. THEOR.

A 2 B 3
C 18
D 6

Si duo numeri A, B metiantur numerum aliquem C: & minimus, quem illi A, B metiuntur, D eundem C metietur.

Si

$A \ 2 \ B \ 3$
 $C \ 18$
 $D \ 6$

Si negas : D diuidens C relin-
 quat se minorem E. Quia igitur
 D metitur C—E; & A, B ipsum
 D metiuntur : metientur quoque
 ipsum C—E, & hinc etiam ipsum E, qui mi-
 nor est quam D. Ergo D non erit minimus
 eorum, quos A, B metiuntur; contra hyp.

PROP. XXXVIII. PROBL.

*Tribus numeris A, B, C datis, inuenire mi-
nimus numerum, quem metiantur.*

$\phi. \ 36. \ 7.$
 $A \ 3 \ B \ 4 \ C \ 6$

1. Sume ϕ minimum D,
 quem duo A, B metiuntur.
 Si C etiam metiatur ipsum
 D: erit D quaesitus.

Nam quod tres A, B, C ipsum D metian-
 tur, patet. Quod autem minimus sit, sic
 ostenditur. Si negas: metiantur A, B, C ali-
 um numerum E ipso D minorem. Ergo &
 D metietur \approx ipsum E, maior minorem. Q.
 E. A.

$\psi. \ 37. \ 7.$
 $A \ 2 \ B \ 3 \ C \ 4$

2. Si autem C non me-
 tiatur D: sume minimum ϕ
 E, quem C & D metiantur.
 Qui erit quaesitus.

Nam A, B, qui ipsum D metiuntur, me-
 tientur quoque ψ ipsum E. Ergo tres A, B,
 C ipsum E metientur. E autem minimus
 erit. Si enim non: metiantur A, B, C alium
 F < E. Ergo & D \approx metietur ipsum F.
 Quare quum C & D ipsum F metiantur: me-
 tietur

tietur eundem \propto etiam E, minorem maior. \propto 37. 7.
Q. E. A. \propto . \propto 13. ax. 7.

PROP. XXXIX. THEOR.

A 12 B 4 *Si numerum A numerus aliquis*
C 3 *B metiatur, ille A, quem meti-*
tur B, partem habebit C a metien-
te B denominatam.

Metiatur enim B ipsum A per vnitates in
C: ergo, quum \propto etiam 1 metiatur C per vni- \propto 5. ax. 7.
tates in eodem, 1 ipsum C aequaliter metie-
tur, ac B ipsum A. Quare 1 ipsum B aequa-
liter β metietur ac C ipsum A; id est γ C ipsius β 15. 7.
A eadem pars est, quae 1 ipsius B. Sed 1 est γ 3. def. 7.
pars numeri B ab ipso B denominata: ergo A
partem habet C ab ipso B denominatam. Q.
E. D.

PROP. XL. THEOR.

A 8 B 2 *Si numerus A partem quancun-*
C 4 *que B habeat: cum numerus C a*
parte B denominatus metietur.

Quia δ numerus C tot vnitates habet, quo- δ hyp.
ta pars B est ipsius A: erit 1 eadem pars ipsius
C, quae B ipsius A; id est ϵ 1 ipsum C aequa- ϵ 3. def. 7.
liter metietur, ac B ipsum A. Hinc & 1 ipsum
B aequaliter ζ metietur, ac C ipsum A. Ergo ζ 15. 7.
C metietur A. Q. E. D.

PROP.

PROP. XLI. PROBL.

Numerum invenire, qui, minimus quum sit, datus partes A, B, C, habeat.

7. 38. 7.

A	$\frac{1}{2}$	D	2
B	$\frac{1}{3}$	E	3
C	$\frac{1}{4}$	F	4
G	12		

 Sint ab ipsis partibus A, B, C denominati numeri D, E, F, & sumatur ⁹ minimus eorum, quos D, E, F metiuntur, qui sit G. Dico factum.

9. 39. 7. Nam ⁹ patet numerum G partes habere a metientibus D, E, F denominatas, id est, partes A, B, C. Dico autem G etiam esse minimum. Nam si quis minor H partes haberet A, B, C: 1. 40. 7. metirentur eum ⁴ numeri D, E, F. Ergo G non esset minimus, quem D, E, F metiuntur; contra hypothesin.



E V C L I D I S E L E M E N T O R V M L I B E R V I I I .

* * * * *

PROP. I. THEOR.

A 8 , B 12 , C 18 , D 27

Si sint quotcunque numeri A, B, C, D deinceps proportionales, quorum extremi A, D sint inter se primi: minimi erunt omnium eadem cum ipsis rationem habentium.

Sinegas: sint totidem alii E, F, G, H minores in eadem ratione. Ergo ex aequo $A : D :: E : H$. Quare quum A, D, primi inter se, sint quoque β minimi: γ metientur illi ipsos β . 23. 7. 7. cor. 21. 7.
E, H, se ipsis minores. Q. E. A.

PROP. II. PROBL.

Numeros inuenire deinceps proportionales minimos, quotcunque quis imperauerit, in data ratione.

A 2 , B 3

A^2 4 , AB 6 , B^2 9

A^3 8 , A^2B 12 , AB^2 18 , B^3 27

1. Sint A, B minimi β in data ratione: erunt β . 35. 7.
 A^2 , AB , B^2 tres deinceps proportionales minimi in data ratione.

N

Nam

$$A^2, B^3$$

$$A^2 4, AB 6, B^2 9$$

$$A^3 8, A^2 B 12, AB^2 18, B^3 27$$

ε. 18. 7.
ζ. 24. 7.
η. 29. 7.
θ. 1. 8.

Nam $A^2 : AB = A : B = AB : B^2$. Et quia A, B primi inter se² sunt, ideoque etiam A^2, B^2 primi² sunt inter se: patet⁹, A^2, AB, B^2 minimos esse in ratione A : B. Q. E. F.

2. Sint iterum A, B minimi in data ratione: erunt $A^3, A^2 B, AB^2$ & B^3 quatuor minimi in data ratione deinceps proportionales.

κ. 17. 7.
λ. 24. &
29. 7.

Nam similes sunt eidem rationi A : B sequentes² $A^3 : A^2 B, A^2 B : AB^2, AB^2 : B^3$. Quum igitur A^3, B^3 inter se² primi sint : erunt $A^3, A^2 B, AB^2, B^3$ quatuor minimi in data ratione continue proportionales. Et eodem modo quotcunque proportionales inuestigantur. Q. E. F.

Corollaria.

1. Ex hoc manifestum est, si tres numeri deinceps proportionales minimi fuerint omnium eandem cum ipsis rationem habentium ; extremos eorum quadratos esse ; si vero quatuor ; esse cubos.

* 2. Et patet simul, latera extremorum esse duos illos numeros, qui minimi sunt in data ratione.

PROP. III. THEOR.

Si sint quotcunque numeri A, B, C, D deinceps proportionales minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium ; eorum extremi A, D primi inter se erunt.

Sum.

A 8, B 12, C 18, D 27

E, 2, F 3

G 4, H 6, K 9

L 8, M 12, N 18, O 27

Sumtis enim^μ duobus minimis numeris E, F, ^{μ. 35. 7. &}
 & tribus G, H, K, & sic deinceps pluribus mini- ^{2. 8.}
 mis continue proportionalibus in eadem ratio-
 ne A : B, donec peruentum sit ad totidem L, M,
 N, O, quot sunt propositi A, B, C, D: erit vnus-
 quisque ipforum L, M, N, O vnicuique ipforum
 A, B, C, D aequalis. Sed $L = E^3$, & $O =$
 F^3 . Ergo quia^ν L, O primi inter se sunt: et- ^{ν. 29. 7. &}
 iam A, D inter se primi erunt. Q. E. D. ^{24. 7.}

PROP. IV. PROBL.

*Rationibus datis quocunque, A : B, C : D,
 E : F in minimis numeris, numeros inuenire de-
 inceps minimos in datis rationibus.*

A 2, B 5, C 3, D 4, E 5, F 6

H 6, G 15, K 20, L 24

N O M P

Sume $\frac{1}{2}$ minimum G quem B & C metian- ^{ξ. 36. 7.}
 tur, & duos alios H, K, quos ipsi A, D aeque
 metiantur, ac ipsi B & C numerum G.

Cas. 1. Iam si E quoque metitur ipsum K,
 fume numerum L, quem F toties metiatur,
 quoties E ipsum K. Dico factum.

Nam^ο est $H : G = A : B$, & $G : K = C : D$, ^{α. 20. def. 7.}
 & $K : L = E : F$. Si vero neges H, G, K, L mi- ^{& 13. 7.}
 nimos esse eorum, qui in rationibus propositis
 sunt deinceps proportionales: sint alii N, O, M,
 P minimi. Et quia est $A : B = N : O$; A vero
 N 2 &

A 2, B 5, C 3, D 4, E 5, F 6
 H 6, G 15, K 20, L 24
 N O M P

π. cor. 21. 7. & B minimi sunt: B metietur * O. Eadem
ε. 37. 7. ratione C metietur ipsum O. Quare & etiam
 G metietur numerum O, maior minorem.
 Q. E. A.

A 4, B 5, C 2, D 3, E 4, F 3
 H 8, G 10, K 15
 N 32, O 40, M 60, P 45
 Q R S T

Cas. 2. At si non metiatur E ipsum K: su-
 me minimum M quem E & K metiantur; &
 duos N, O quos ipsi H, G aequae metiantur,
 ac K ipsum M, item quantum P, quem F ae-
 que metiatur, ac E ipsum M. Dico factum.

ε. 20. def. 7. Est enim $A : B = H : G = N : O$, item C:
& 13. 7. $D = G : K = O : M$, & $E : F = M : P$. Si
 vero negetur minimos esse N, O, M, P: sint
 Q, R, S, T minimi in datis rationibus. Quum
 ergo sit $A : B = Q : R$; & A, B minimi sint:
 B metietur * R. Eadem ratione C metietur
 R: ergo & G metietur eundem R. Quare
 quum sit $G : K = C : D = R : S$: numerus K
 metietur S. Sed quia $E : F = S : T$, & E, F
 minimi sunt: metietur quoque E ipsum S. Er-
 go tandem M metiretur S, maior minorem.
 Q. E. A.

PROP.

PROP. V. THEOR.

$$\begin{array}{rcl} A & 2 & C & 4 \\ B & 3 & D & 5 \end{array} \quad BC \ 12$$

$$\begin{array}{rcl} AB & 6 & CD & 20 \\ E & 3 & F & 6, G & 10 \end{array}$$

*Plurimi numeri AB, CD
rationem habent ex la-
teribus A, C, & B, D
compositam AB: CD =
(A: C) + (B: D).*

Nam sumtis^r deinceps minimis E, F, G in ϵ . 4. 8.
datis rationibus A: C & B: D; quia $E: G = \tau$ τ . 5. def. 6.
 $(E: F) + (F: G)$: erit $E: G = (A: C) + (B: D)$.
Iam B ipsum C multiplicans faciat BC: & erit
 $AB: BC = \nu$ $A: C = \phi$ $E: F$. Similiter $BC: \nu$ 17 . 7.
 $CD = \nu$ $B: D = \phi$ $F: G$. Ergo ex æquo ϕ . constr.
 $AB: CD = \kappa$ $E: G = (A: C) + (B: D)$. Q. κ . 14. 7.
E. D.

PROP. VI. THEOR.

$$\begin{array}{rcl} A & 16, & B & 24, & C & 36, & D & 54, & E & 81 \\ & F & 4, & G & 6, & H & 9 \end{array}$$

*Si fuerint quotcunque numeri A, B, C, D, E
deinceps proportionales; primus autem A secun-
dum B non metiatur; neque alius aliquis ullum
metietur.*

1. Numeros hos deinceps se non metiri
patet: quia si B metiretur C, A etiam metire-
tur^r ipsum B, contra hypothesin.

2. Nec ullus, ut A, ullum, ut C, metie-
tur. Quot enim sint sumti A, B, C, tot su-
mantur minimi^B numeri in eadem ratione,
qui sint F, G, H: hinc erit^r $A: C = F: H$. Sed μ . 35. 7.
quia $A: B = F: G$, & A non metitur B: ne-
que F metietur G; quare F unitas esse^B ne-
quit. Hinc, quum F & H primi^r sint inter ϵ . 3. 8.

N 3

fe,

ζ. 12. def. 7. se, F nequit ζ metiri ipsum H. Ergo nec A
 α. 20. def. 7. metiri potest α ipsum C. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.

A 2, B 4, C 8, D 16

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales (\div A, B, C, D), primus autem A metiatur extremum D: & secundum B metietur.

γ. 6. 8.

Si negas: neque alius aliquis vllum η metietur, ergo nec A ipsum D; contra hypothesin.

PROP. VIII. THEOR.

A 2, C 4, D 8, B 16

G 1, H 2, K 4, L 8

E 3, M 6, N 12, F 24

Si inter duos numeros A, B numeri deinceps proportionales C, D ceciderint:

quot inter eos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter alios E, F, eandem cum ipsis A, B rationem habentes, cadent.

δ. 35. 7.

ι. 3. 8.

κ. 14. 7.

λ. hyp.

μ. 23. 7.

ν. 21. 7.

Sumtis enim θ totidem minimis G, H, K, L, quot sunt numeri A, B, C, D, & in eadem ratione: erunt G & L ϑ primi inter se, & ex aequo erit * $G : L = A : B = \lambda E : F$. Sunt autem μ G & L minimi: ergo ϑ G aequaliter metitur ipsum E, atque λ ipsum F. Sed quoties G metitur E, toties numeri H, K metiantur ipsos M, N. Numeri ergo G, H, K, L ipsos E, M, N, F aequaliter metientur; ideoque ζ numeri G, H, K, L in eadem ratione erunt, in qua sunt E, M, N, F. Ergo E, M, N, F

ζ. 20. def. 7.
 & 13. 7.

N, F eandem cum ipsis A, C, D, B rationem habebunt, & ergo deinceps proportionales erunt. Tot igitur inter E, F cadunt deinceps proportionales, quot inter A & B. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.

A 8, C 12, D 18, B 27
 E 1
 F 2, G 3
 H 4, K 6, L 9
 M 8, N 12, O 18, P 27

Si duo numeri A, B inter se primi fuerint, & inter ipsos numeri deinceps proportionales C, D ceciderint: quot inter ipsos A, B cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter utrumque ipsorum A, B & unitatem E deinceps proportionales cadent.

Sume enim^o in eadem ratione, in qua sunt ^{a. 35. 7. & 3. 8.} A, C, D, B, duos minimos F, G, & tres minimos H, K, L, & sic porro donec sumtorum M, N, O, P multitudo aequalis fiat multitudi-
 ni datorum A, C, D, B. Hinc, quia & A, C, D, B minimi ^π sunt in eadem ratione, erit ^{π. 1. 8.} A = M, C = N, D = O, B = P. Et quia ^{f. cor. 2. 8. & cor. 1. 7.} H = F^a: erit E: F =^π F: H. Similiter quia A = M = H F: erit E: F = H: A. Ergo \div E, F, H, A. Eodem modo demonstratur, esse \div E, G, L, B. Q. E. D.

PROP. X. THEOR.

Si inter duos numeros A, B, & unitatem C deinceps proportionales numeri D, E, & F, G ceciderint: quot inter utrumque ipsorum A, B & unitatem C cadunt numeri deinceps proportionales,

N 4

tionales, totidem & inter ipsos A, B numeri deinceps proportionales cadent.

Numerus enim D

A 8, K 12, L 18, B 27 ipsum F multiplicans
E 4, H 6, G 9 faciat H, & sumatur
D 2, F 3 $K = HD$; & $L = HF$.
C 1 Et quia ponitur C:

$D = D$; E; C vero

7. 5. ax. 7. ipsum D metitur^r per D: metietur^v quoque
v. 20. def. 7. D ipsum E per D; & ergo $E = \phi D^2$. Rur-
q. 9. ax. 7. sus quia ponitur C: $D = E$: A: erit $A = ED$.
Eadem ratione $G = F^2$, & $B = GF$. Quam
ergo sit $E = D^2$ & $H = FD$: erit $D:F = E:H$.
Item quia $H = FD$, & $G = F^2$:
erit $D:F = H:G$. Ergo $E:H = H:G$.
Rursus quia $K = HD$, & $L = HF$: erit $A:K$
2. 17. 7. $= E:H = D:F = K:L$. Similiter quia
v. 18. 7. $L = HF$, & $B = GF$: erit $L:B = H:G =$
 $E:H$. Quare $\div A, K, L, B$. Q. E. D.

PROP. XI. THEOR.

A^2 4, AB 6, B^2 9 Inter duos numeros
 A^2 , B^2 , unus
A 2, B 3 quadratos A^2 , B^2 , unus
medius proportionalis AB
cadit. Et quadratus A^2 ad quadratum B^2 du-
plicatam rationem habet pius, quam latus A ha-
bet ad latus B.

a. 18. 7. 1. Est enim $A^2:AB = A:A = B:AB = B^2$.
p. 17. 7. Q. E. D.

2. Quia (per dem.) $\div A^2, AB, B^2$: erit
7. 10. def. 5. $A^2:B^2 = (A^2:AB)^2 = (A:B)^2$. Q. E. D.

PROP.

PROP. XII. THEOR.

$$A^3 \ 8, \ A^2B \ 12, \ AB^2 \ 18, \ B^3 \ 27$$

$$A^2 \ 4, \ AB \ 6, \ B^2 \ 9$$

$$A \ 2, \ B \ 3$$

Inter duos numeros cubos A^3, B^3 , duo medii proportionales A^2B, AB^2 cadunt. Et cubus A^3 ad cubum B^3 triplicatam habet rationem eius, quam latus A habet ad latus B .

1. Nam $A : B =^d A^2 : AB$, & $A : B =^d AB : B^2$. Sed $A^3 : A^2B =^d A^2 : AB = A : B$. Rursum $A^2B : AB^2 =^d A : B$, item $AB^2 : B^3 =^d AB : B^2 = A : B$. Ergo $\div A^3, A^2B, AB^2, B^3$. Q. E. D. d. 18. 7.

2. Quia (per dem.) $\div A^3, A^2B, AB^2, B^3$: ζ . ii. def. 5. erit $A^3 : B^3 =^e (A^3 : A^2B)^3 = (A : B)^3$. Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

$$A \ 2, \ B \ 4, \ C \ 8$$

$$A^2 \ 4, \ AB \ 8, \ B^2 \ 16, \ BC \ 32, \ C^2 \ 64$$

$$A^3 \ 8, A^2B \ 16, AB^2 \ 32, B^3 \ 64, B^2C \ 128, BC^2 \ 256, C^3 \ 512$$

Si sint quotcunque numeri A, B, C deinceps proportionales, & unusquisque se ipsum multiplicans faciat aliquos A^2, B^2, C^2 ; facti ex ipsis proportionales erunt. Et si positi a principio numeri A, B, C factos A^2, B^2, C^2 multiplicantes, alios A^3, B^3, C^3 faciant, & ipsi proportionales erunt. Et semper circa extremas hac contingit.

Expositis enim numeris AB, BC, A^2B, AB^2, B^2C , & BC^2 : erit $\div A^2, AB, B^2$; item $\div A^3, A^2B, AB^2, B^3$, & erunt omnium horum numerorum rationes eadem rationi $A : B$. Similiter B^2, BC, C^2 sunt deinceps proportionales v. 2. 8.

A 2, B 4, C 8

A^2 4, AB 8, B^2 16, BC 32, C^2 64

A^3 8, A^2B 16, AB^2 32, B^3 64, B^2C 128, BC^2 256, C^3 512

in ratione B : C, pariterque B^3 , B^2C , BC^2 , C^3
in eadem ratione deinceps proportionales.
Ergo quia, $A : B = B : C$, erunt A^2 , AB, B^2 in
eadem ratione, in qua B^2 , BC, C^2 ; nec non
 A^3 , A^2B , AB^2 , B^3 in eadem ratione, in qua
 B^3 , B^2C , BC^2 , C^3 . Sunt autem tam illi quam
hi inter se multitudine pares. Ergo ex ae-
quo⁹ $A^2 : B^2 = B^2 : C^2$; & $A^3 : B^3 = B^3 : C^3$.
Q. E. D.

9. 14. 7

PROP. XIV. THEOR.

A 2, B 4

A^2 4, AB 8, B^2 16

*Si numerus quadratus
 A^2 metiatur quadratum
minorum B^2 : & latus
A latus B metiatur.
Et si latus A metiatur
latus B : & quadratus A^2 quadratum B^2 me-
tietur.*

11. 2. 8

11. 7. 8.

11. 20. def. 7.

1. Sumto enim numero AB, erunt² deinceps proportionales A^2 , AB, B^2 in ratione A ad B. Ergo A^2 metietur¹ AB. Hinc quia $A^2 : AB = A : B$, metietur etiam¹⁰ A ipsum B. Q. E. D.

11. 18. 7.

2. Si A metitur B : quia $A : B^2 = A^2 : AB$, A^2 quoque metietur¹⁰ AB. Et quia $A^2 : AB = A : B$, metietur¹⁰ & AB ipsum B^2 . Ergo⁵ A^2 metietur B^2 . Q. E. D.

11. 11. 7.

PROP.

PROP. XV. THEOR.

$$A^3 \ 8, \ A^2B \ 16, \ AB^2 \ 32, \ B^3 \ 64$$

$$A^2 \ 4, \ AB \ 8, \ B^2 \ 16$$

$$A \ 2, \ B \ 4$$

Si numerus cubus A^3 metiatur cubum numerum B^3 : & latus A latus B metietur. Et si latus A latus B metiatur: & cubus A^3 cubum B^3 metietur.

1. Sumtis enim numeris A^2B , AB^2 , quia deinceps in ratione A ad B proportionales sunt A^3 , A^2B , AB^2 , B^3 , & A^3 ipsum B^3 metitur; metietur & A^3 ipsum A^2B . Quare quum sit $A^3 : A^2B = A : B$: metietur & A^3 ipsum B . Q. E. D.

2. Quia, iisdem sumtis, est $A : B = A^3 : A^2B$, & A ipsum B metiri ponitur: metietur & A^3 ipsum A^2B . Quare quum sit $\div A^3$, A^2B , AB^2 , B^3 : patet & A^3 ipsum B^3 metiri. Q. E. D.

PROP. XVI. THEOR.

Si numerus quadratus A^2 non

$A^2 \ 9, \ B^2 \ 16$ metiatur quadratum numerum B^2 :

$A \ 3, \ B \ 4$ neque latus A latus B metietur.

Et si latus A non metiatur latus B : neque hic

quadratus A^2 quadratum B^2 .

1. Si enim A metiretur B : A^2 etiam metiretur B^2 ; contra hypothesin.

2. Et si A^2 metiretur B^2 : A etiam metiretur B ; contra hypothesin.

PROP.

PROP. XVII. THEOR.

Si numerus cubus A^3 non metiatur cubum numerum B^3 ; neque latus A latus B metietur. Et si latus A non metiatur latus B ; neque cubus A^3 cubum B^3 metietur.

1. Si enim A metiretur B : A^3 quoque metiretur B^3 , contra hypothesin.
2. Si A^3 metiretur B^3 : etiam A metiretur B ; contra hypothesin.

PROP. XVIII. THEOR.

Inter duos similes planos numeros AB, CD , unus medius proportionalis BC cadit. Et planus AB ad planum CD duplicatam rationem habet eius, quam latus homologum A habet ad homologum latus C .

1. Quia enim $AB : BC =^v A : C$, & $A : C =^v B : D$: erit $AB : BC =^v B : D =^v BC : CD$. Q. E. D.
2. Quum $\div \div AB, BC, CD$ (per dem.): erit $AB : CD = (AB : BC)^2 = (A : C)^2 = (B : D)^2$. Q. E. D.

* Cor. Hinc inter duos similes planos cadit unus medius proportionalis in ratione laterum homologorum.

PROP. XIX. THEOR.

$A 2, B 3, C 5, D 4, E 6, F 10$
 $ABC 30, BCD 60, BDF 120, DEF 140$
 $AB 6, BD 12, DE 24$

Inter

Inter duos similes solidos numeros ABC, DEF duo medii proportionales BCD, BDF cadunt. Et solidus ABC ad similem solidum DEF triplicatam rationem habet eius, quam latus homologum A, vel B, vel C habet ad homologum latus D, vel E, vel F.

1. Capiantur enim numeri AB, BD, DE, BCD, BDF. Et quia $A : B = x D : E$ erunt ψ x . hyp. AB, DE similes plani, & $\div \div$ α AB, BD, DE in ψ 21. def. 7. ratione $A : D$, vel $B : E$, vel $C : F$. Est autem α 18. 8. $ABC : BCD = \alpha AB : BD$, & $BDF : DEF = \alpha$ α 17. 7. $BD : DE$. Quare $ABC : BCD = BDF : DEF = C : F$. Denique $BCD : BDF = \alpha C : F$. Ergo $\div \div$ ABC, BCD, BDF, DEF. Q. E. D.

2. Quia ergo $\div \div$ ABC, BCD, BDF, DEF: erit $ABC : DEF = \beta (ABC : BCD)^3 = \gamma (C : F)^3 = (B : E)^3 = (A : D)^3$. Q. E. D. β 11. def. 5. γ dem.

* Cor. Ergo inter duos similes solidos cadunt duo medii proportionales in ratione laterum homologorum.

PROP. XX. THEOR.

A 8, C 12, B 18 *Si inter duos numeros A, B unus medius proportionalis C cadat: numeri A, B similes plani erunt.*
D 2, E 3, F 4, G 6

Sume minimos D, E in ratione A ad C. Ergo β D ipsum A aequaliter metietur, ac E ipsum C. Metiatur D ipsum A per E. Ergo $DE = \beta A$, & $EF = \beta C$. Ergo A planus β β 21. 7. β 9. ax. 7. numerus est, cuius latera sunt D, F. Rursus β 16. def. 7. quia $A : G = \beta C : B$; minimi quoque D, E β hyp. sunt.

A 8, C 12, B 18 sunt in ratione C: B.
 D 2, E 3, F 4, G 6 Hinc si D metiatur
 ipsum C per G, E me-
 tietur quoque B per G. Ergo $DG = C$, &
 $EG = B$. Quare & B est numerus planus. Et
 quia $DG = C = EF$, ideoque $D : F = E :$
 G: erunt A & B similes * numeri plani. Q.
 E. D.

PROP. XXI. THEOR.

A 24, C 72, D 216, B 648

E 1, F 3, G 9

H 1, K 1, N 24, L 3, M 3, O 72

*Si inter duos numeros A, B duo medii pro-
 portionales C, D cadant: numeri A, B similes
 solidi erunt.*

Sume^λ tres minimos E, F, G eandem cum
 A, C, D rationem habentes, & ergo deinceps
 proportionales: & erunt E, G primi^μ inter se,
 & similes plani^ν numeri. Sint H, K latera
 ipsius E, & L, M latera ipsius G. Erunt ergo
 E, F, G proportionales in ratione $\frac{1}{2}$ H: L vel
 K: M. Iam quum E, F, G eandem cum A,
 C, D rationem habeant: erit $E : G = A : D$.
 Et quia E, G primi sunt, ideoque^π minimi:
 metientur ipsos A, D aequaliter. Metiatur
 E ipsum A per N: ergo $EN = A$. Sed E
 $= HK$: ergo A est solidus^τ numerus, cuius
 latera H, K, N. Rursus quia E, F, G minimi
 sunt eandem rationem habentium, quam C, D, B:
 E ipsum C aequaliter metitur, ac G ipsum B.
 Metiatur E ipsum C per O. Ergo $GO = B$.
 Sed

Sed $G = LM$. Quare B est solidus, cuius latera L, M, O. Denique quia $A = EN$, & $C = EO$: erit $N : O = A : C = E : F =$ u. 17. 7.
 $H : L = K : M$. Quare similes φ solidi sunt 9. 21. def. 7.
 A, B numeri. Q. E. D.

PROP. XXII. THEOR.

A 4, B 6, C 9 *Si tres numeri A, B, C deinceps proportionales fuerint, primus A autem sit quadratus: & tertius C quadratus erit.*

Nam A, C similes \propto sunt plani numeri. Er- x. 20. 2.
 go quum ψ latera ipsius A aequalia sint: \propto erunt 18. def. 7.
 & latera ipsius B aequalia, ideoque ψ erit & 21. def. 7.
 C quadratus. Q. E. D.

PROP. XXIII. THEOR.

A 8, B 12, C 18, D 27

Si quatuor numeri A, B, C, D deinceps proportionales fuerint, primus autem A sit cubus: & quartus D cubus erit.

Nam A, D sunt \propto similes solidi. Ergo & D \propto 21. 2.
 cubus est. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.

A 4, B 9 *Si duo numeri A, B inter se rationem habeant, quam numerus quadratus C ad quadratum numerum D, primus autem A sit quadratus: & secundus B quadratus erit.*
 C 16, D 36

Quia enim inter similes planos C, D, vnus medius proportionalis \propto cadit; & $A : B = C : D$: 8. 18. 2.
 cadet

7. 8. 8.
3. 22. 8.

cadet quoque inter A, B vnus γ medius proportionalis. Ergo & B^d est quadratus. Q. E. D.

* *Schol. 1.* Ergo ratio numeri quadrati ad non quadratum nequit exhiberi per duos quadratos numeros.

* *Schol. 2.* Et si A numerus ad numerum B est vt quadratus ad quadratum: numeri A, B similes plani sunt. (per 10. 8. & dem. huius). Et hinc dissimiles plani non sunt vt quadratus ad quadratum.

PROP. XXV. THEOR.

A 64, B 216 *Si duo numeri A, B inter se
C 8, D 27 rationem habeant, quam numerus
cubus C ad cubum numerum D,
primus autem A sit cubus: & secundus B cubus
erit.*

1. 19. 8.
2. 8. 8.
4. 23. 8.

Quia enim C, D similes solidi sunt: duo medii proportionales inter^a eos cadunt. Ergo & inter A, B duo medii proportionales^c cadunt. Quare quum A cubus sit: B etiam^a cubus erit. Q. E. D.

* Ergo ratio numeri cubi ad non cubum reperi nequit in duobus numeris cubis.

PROP. XXVI. THEOR.

A 6, C 12, B 24 *Similes plani numeri A,
D 1, E 2, F 4 B inter se rationem habent,
quam numerus quadratus
ad quadratum numerum.*

3. 18. 8.
11. 2. 8.

Medius proportionalis, inter A, B cadens^a, sit C, & sumantur^a minimi D, E, F eandem quam

quam A, C, B rationem habentium. Ergo ^λ ^{λ. I. cor. 2. 8.}
 D, F quadrati erunt. Et quia $D:F = A:B$ ^{μ. 14. 7.}
 habebit A ad B rationem quadrati ad quadra-
 tum. Q. E. D.

PROP. XXVII. THEOR.

A 16, C 24, D 36, B 54

E 8, F 12, G 18, H 27

*Similes solidi numeri A, B inter se rationem
 habent, quam numerus cubus ad cubum nume-
 rum.*

Nam medii duo proportionales inter A, B
 cadentes⁹ sint C, D, & sint E, F, G, H totidem ^ζ v. 19. 8.
 minimi & in eadem ratione ac A, C, D, B. ^{ξ. 2. 8.}
 Ergo^o eorum extremi E, H cubi erunt. Hinc, ^{α. I. cor. 2. 8.}
 quia $A:B = E:H$, pater, esse A ad B, ut ^{μ. 14. 7.}
 cubus ad cubum. Q. E. D.





E V C L I D I S

E L E M E N T O R V M

L I B E R I X.

* * * * *

PROP. I. THEOR.

Si duo similes plani numeri A, B se se multiplicantes aliquem fecerint: factus AB quadratus erit.

A 6, B 54
AB 324
A² 36

α. 17. 7.

β. 18. 8.

γ. 8. 8.

δ. 22. 8.

Nam numerus A se ipsum multiplicans faciat quadratum A². Ergo α A : B = A² : AB. Et quia inter A & B vnus medius proportionalis^β cadit: cadet etiam γ inter A² & AB vnus medius proportionalis. Ergo AB est δ quadratus. Q. E. D.

PROP. II. THEOR.

Si duo numeri se se multiplicantes A, B, quadratum numerum AB efficiant: similes plani erunt.

A 3, B 12
AB 36
A² 9

α. 17. 7.

β. 18. 8.

γ. 8. 8.

δ. 20. 8.

Sumatur numerus quadratus A². Ergo A : B = A² : AB. Et quia quadrati A², AB similes plani numeri sunt, & ergo inter eos vnus medius proportionalis^β cadit: cadet quoque inter A & B vnus γ medius proportionalis. Ergo A & B similes plani sunt δ numeri. Q. E. D.

PROP.

PROP. III. THEOR.

A^3 8 A^6 64
 A^2 4
 A 2
 Si cubus numerus A^3 se ipsum multiplicans faciat aliquem A^6 : factus A^6 cubus erit.

Sumatur enim cubi A^3 latus A , & huius quadratum A^2
 $=$ AA . Ergo $A^3 = A^2A$. Quare $1: A$ 18. def. 7.
 $= A: A^2$, & $1: A = A^2: A^3$. Ergo inter 1 & A^2 18. & 19.
 A^3 duo medii proportionales cadunt. Quia def. 7.
 vero $1: A^3 = A^2: A^6$, totidem etiam inter A^2 8. 8.
 A^3 & A^6 cadunt. Ergo A^6 cubus est. Q. 23. 8.
 E. D.

PROP. IV. THEOR.

A 8, B 27
 A^2 64 AB 216
 Si numerus cubus A cubum numerum B multiplicans faciat aliquem: factus AB cubus erit.

Sumatur numerus A^2 , qui etiam cubus erit. e. 3. 9.
 Et quia $A: B = A^2: AB$: cubus erit & ipse AB . 18. 7.
 AB. Q. E. D. e. 25. 8.

PROP. V. THEOR.

A 8, B 27
 A^2 64, AB 216
 Si cubus numerus A numerum aliquem B multiplicans faciat cubum AB : & multiplicatus B cubus erit.

Sumatur numerus A^2 , qui cubus erit. Et e. 3. 9.
 quia $A: B = A^2: AB$: erit & B cubus. Q. 18. 7.
 E. D. e. 25. 8.

PROP. VI. THEOR.

A 8, A^2 64, A^3 512

Si numerus A se ipsum multiplicans cubum A^2 faciat: & ipse A cubus erit.

Sumto enim cubo numero A^3 , quia $A^3 : A^2$
 ϕ . 17. 7. $=^{\phi} A^2 : A$: erit A^3 cubus. Q. E. D.
 χ . 25. 8.

PROP. VII. THEOR.

A 6, B 7 *Si compositus numerus A nume-*
 AB 4^2 *rum aliquem B multiplicans quem-*
 C₃, D₂ *piam faciat: factus AB solidus*
erit.

ψ . 13. def. 7. Numerum enim A metiatur ψ numerus C
 ω . 9. ax. 7. per D. Ergo $A =^{\omega} CD$. Ergo $AB = CDB$
 α . 17. def. 7. solidus $^{\omega}$ est. Q. E. D.

PROP. VIII. THEOR.

$\div \div$ 1. A 3. B 9. C 27. D 81. E 243. F 729

Si ab unitate quotcunque numeri A, B, C, D, E, F deinceps proportionales fuerint: tertius quidem ab unitate B quadratus est, & unum intermittentes omnes D, F; quartus autem C est cubus, & duos intermittentes omnes F; septimus vero F cubus simul & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

1. Quia enim $1 : A = A : B$: unitas ipsum
 β . 20. def. 7. A aequaliter metitur $^{\beta}$ ac A ipsum B. Ergo
 γ . 9. ax. 7. A per se ipsum metitur γ numerum B, & hinc
 δ . 9. ax. 7. $B =^{\delta} A^2$ quadratus est. Et quoniam $\div \div$ B,
 ϵ . 22. 8. C, D: erit $^{\epsilon}$ & D quadratus. Eadem ratione
 & F quadratus erit, & unum intermittentes
 omnes quadrati erunt. Q. E. D.

2. Quia

2. Quia est $1: A = B:C$: metietur B ipsum C per A, & ergo $C = {}^d AB = A^3$ cubus p. 9. ax. 7. erit. Et quum sint $\div\div C, D, E, F$: erit e^2 & F c. 23. 8. cubus. Et similiter omnes duos intermittentes cubi erunt. Q. E. D.

3. Et quia F etiam ostensus est quadratus: septimus F & quadratus & cubus simul est; idemque pariter demonstratur de omni quinque intermittente. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.

$\div\div 1, A 4, B 16, C 64, D 256, E 1024, F 4096$
 $\div\div 1, A 8, B 64, C 512, D 4096, E 32768, F 262144$

Si ab unitate quocunque numeri A, B, C, D, E, F deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem A sit quadratus; & reliqui omnes quadrati erunt: si qui post unitatem A sit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

1. Sit enim A quadratus. Iam tertius B, & vnum intermittentes omnes D, F, quadrati p. 8. 9. sunt. Sed quia sunt $\div\div A, B, C$, & A quadratus est: erit c^2 C quadratus, hinc & E & c. p. 22. 8. Omnes ergo quadrati sunt. Q. E. D.

2. Sit A cubus. Iam quartus C, & omnes F, qui duos intermittunt, c^3 cubi sunt. Et quia $1: A = A: B$; & ergo $B = {}^d A^2$: erit & B^2 p. 20. def. 7. cubus; quare & E cubus c^3 erit. Et ob $\div\div$ & p. 9. ax. 7. A, B, C, D, erit & c^3 D cubus. Et similiter reliqui omnes cubi sunt. p. 23. 8. Q. E. D.

PROP. X. THEOR.

1, A 2, B 4, C 8, D 16, E 32, F 64

Si ab unitate quocunque numeri A, B, C, D, E, F deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem A non sit quadratus; neque alius ullus quadratus erit, præter tertium ab unitate B, & unum intermittentes omnes D, F: si, qui post unitatem, A non sit cubus; neque alius ullus cubus erit, præter quartum ab unitate C, & duos intermittentes omnes F.

1. Non sit A quadratus, & tamen C quadratus sit, si fieri potest. Ergo quia & B quadratus^u est: A ad B eam rationem habet, quam quadratus B ad quadratum C, & hinc A quadratus^r erit; *contra hypotesin*. Similiter ostendemus nullum alium quadratum esse præter B, D, F &c. Q. E. D.

2. Si A cubus non sit, & tamen D cubus esset: quoniam C cubus^u est; haberet & B ad C rationem, quam cubus C ad cubum D, & ergo ipse B cubus^o esset. Hinc quia, ob $1:A = A:B$, est $B = \pi A^2$, esset & A cubus^c; *contra hyp.* Similiter ostendemus nec ullum alium cubum esse præter C & F &c. Q. E. D.

PROP. XL THEOR.

÷ 1, A 3, B 9, C 27, D 81, E 243

Si ab unitate quocunque numeri A, B, C, D, E deinceps proportionales fuerint: minor A maiorem D metitur per aliquem C eorum, qui sunt in numeris proportionalibus.

Quia

Quia enim est $1 : A = C : D$: aequè metitur C ipsum D^r ac 1 ipsum A. Ergo & A σ . 20. def. 7. ipsum D aequè^r metitur ac 1 ipsum C, id est^r τ . 15. 7. A metitur D per C. ν . 9. ax. 7.

* Pariter, si sumantur B & E, demonstratur B metiri ipsum E per aliquem C inter proportionales : quia ϕ 1: $B = C : E$. Q. E. D. ϕ . 14. 7.

* Cor. In serie numerorum ab unitate deinceps proportionalium secundus A quemvis D metitur per proxime praecedentem C.

* Schol. 1. Et hinc secundus A quemvis C multiplicans facit proxime sequentem D.

* Schol. 2. Si numerus qui metitur aliquem ex proportionalibus non sit vnus proportionalium : neque is, per quem metitur, vnus ex proportionalibus erit^r. ν . 2. cor. 16. 7.

PROP. XII. THEOR.

\div 1, A 4, B 16, C 64, D 256
E 2, H 8, G 32, F 128

Si ab unitate quolibet numeri A, B, C, D deinceps proportionales fuerint : quicumque primorum numerum E metiuntur ultimum D, iidem & cum A, qui unitati proximus est, metientur.

Si negas E metiri ipsum A : erunt ψ E & A primi inter se. Metiatur autem E ipsum D ψ 31. 7. per F : & erit $EF =^a D =^a AC$. Quare $A : E =^b F : C$. Sunt autem A, E primi inter se, & γ minimi : hinc E metitur δ etiam C. Metiatur per G. Ergo $EG =^a C =^a AB$. Quare $A : E =^b G : B$. Hinc E metitur^r ipsum B. Metiatur eum per H. Ergo $EH =^a B =^a A^2$. Hinc $A : E =^b H : A$. Ergo E metietur quoque^r ipsum A. Q. E. D. α . 9. ax. 7. α . 1. sch. 11. 9. β . 19. 7. γ . 23. 7. δ . cor. 21. 7.

O 4

* Schol.

* *Schol.* 1. Numerus primus, ultimum metiens, metitur omnes ultimum præcedentes, per cor. 11. 9. & 11. ax. 7.

* *Schol.* 2. Si quis numerus, proximum unitati non metiens, ultimum metiatur, numerus erit compositus. Si enim primus esset, metiretur proximum unitati.

* *Schol.* 3. Si proximus unitati sit numerus primus: nullus alius numerus primus ultimum metietur. Si enim alius metiretur, unitati proximum quoque metiretur, qui ergo primus non foret.

PROP. XIII. THEOR.

$\div \div$ 1, A 5, B 25, C 125, D 625

E --- H --- G --- F ---

Si ab unitate quotcunque numeri A, B, C, D deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem A primus sit: maximum D nullus alius metietur, præter eos A, B, C, qui sunt in numeris proportionalibus.

Si enim fieri potest: metiatur ultimum D aliquis numerus E, qui non idem sit cum aliquo ipsorum A, B, C. Ergo quia E numerus primus esse ζ nequit: compositus erit.

2. 3. schol.

12. 9.

4. 33. 7.

Quare ipsum E metietur ν aliquis primus, qui nullus erit præter A. Si quis enim alius me-

9. ax. 7.

tiretur ipsum E: idem ϑ quoque ipsum D metiretur; quod fieri nequit ζ . Ergo A metietur E. Iam metiatur E ipsum D per F: & F

1. 2. sch. 11. 9.

2. cor.

16. 7.

2. 9. ax. 7.

1. 1. sch.

11. 9.

1. 19. 7.

nullus ex ipsis A, B, C esse ν poterit. Sed quia F metietur ν D: eodem modo, quo ante demonstrabitur, F compositum esse, quem A metiatur. Et quia, ob $EF = \lambda D = \mu AC$,

est $A : E = \nu F : C$; A vero ipsum E metitur:

F quo-

F quoque ipsum C^{ξ} metietur. Metiatur per G , qui nullus ex ipsis A, B esse poterit. Et quia ob $FG =^{\lambda} C =^{\mu} AB$, est $A : F =^{\nu} G : B$; A vero ipsum F metitur: metietur ξ & G ξ . 20. def. 7. ipsum B . Metiatur per H . Quum vero G nullus sit ex proportionalibus: neque H idem erit, qui A . Sed quum, ob $GH =^{\lambda} B =^{\mu} A^2$, sit $A : G =^{\nu} H : A$, eodem vero, quo ante modo, demonstratur, A ipsum G metiri, quia G ipsum C^{μ} metitur: patet, H metiri ipsum A , & ergo A non esse primum; *contra hypothesis*. ϵ . 11. def. 7.

* *Schol.* Quia similiter demonstratur, quod ipsum C nullus numerus metiatur, praeter A vel B : patet, quod numeros ab unitate deinceps proportionales, si proximus unitati primus sit, nullus numerus metiatur, nisi qui inter ipsos proportionales habetur.

PROP. XIV. THEOR.

Si minimum numerum A
 A 30
 B 2, C 3, D 5 *primi numeri B, C, D me-*
 E -- F -- *tiantur: nullus alius nume-*
rus primus metietur ipsum
A praeter eos, qui a principio metiebantur,
B, C, D.

Si fieri potest, metiatur ipsum A alius E , per F . Ergo E & F facient π numerum A . π . 9. ax. 7. Quare quum B, C , & D metiantur ipsum A : metientur quoque vnum ϵ ipsorum E, F . Non ϵ . 32. 7. autem metiri possunt π primum E : -ergo alterum F metientur. ϵ . 11. def. 7. Est autem $F < A$. Quare A non erit minimus, quem B, C, D metiantur; *contra hypothesis*.

O 5

PROP.

PROP. XV. THEOR.

\div A 9, B 12, C 16 Si tres numeri A, B,
 D 3, E 4 C, deinceps proportiona-
 les, fuerint minimi om-

nium eandem cum ipsis rationem habentium:
 duo quilibet composui ad reliquum primi erunt
 (A + B ad C, B + C ad A, & A + C ad B).

- n. 35. 7. Sumantur duo numeri^v D, E, minimi ean-
 dem cum A, B, C rationem habentium. Er-
 go^o A = D^a, B = DE, & C = E^a. Et quia
 x. 24. 7. D, E primi x inter se sunt: erit & D + E ad
 v. 30. 7. vtrumque^ψ ipsorum D, E primus. Ergo quia
 numeri D + E & D ad ipsum E primi sunt,
 n. 26. 7. erit^u & (D + E) × D ad eundem E primus.
 a. 2. ax. 7. Sed (D + E) × D =^u D^a + ED. Ergo
 β. 27. 7. D^a + ED primus est ad E, hinc quoque^β ad
 γ. l. ax. 7. E^a. Patet igitur A + B esse primum^γ ad C.
 Similiter ostenditur, esse B + C primum ad A.
 Denique quia D + E, D, & E primi sunt in-
 t. 26. 27. 7. ter se: erit^δ (D + E)^a ad DE primus. Sed^u
 (D + E)^a = D^a + 2 DE + E^a. Ergo D^a +
 2 DE + E^a primus est^γ ad ipsum DE, & hinc
^ψ etiam D^a + DE + E^a ad ipsum DE, & pari
 ratione^ψ D^a + E^a ad eundem DE primus erit.
 Quare &^γ A + C ad ipsum B primus est. Q.
 E. D.

PROP. XVI. THEOR.

A 5, B 8, C ---

Si duo numeri A, B primi inter se fuerint:
 non erit ut primus A ad secundum B, ita secun-
 dus B ad alium ullum.

Si

Si enim fieri potest: sit C numerus talis, ut sit $A : B = B : C$. Quia autem A & B minimi sunt eandem cum ipsis rationem habentium: A metietur ² ipsum B. Hinc quum A quoque se ipsum metiatur: non erunt A, B primi inter se; *contra hypothesin*. 23. 7.
21. 7.

PROP. XVII. THEOR.

A 8, B 12, C 18, D 27, E---

Si fuerint quotcunque numeri A, B, C, D deinceps proportionales; extremi autem ipsorum, A, D, primi inter se sint: non erit ut primus A ad secundum B ita ultimus D ad alium ullum.

Si negas: sit $A : B = D : E$. Quia ergo A: D = ¹ B : E, & A, D minimi ⁹; A ipsum B ⁴ metietur. Ergo, quum sit $A : B = B : C = C : D$; metietur B ² ipsum C, & ergo ipsum ² D. Quare & A ipsum D ¹ metietur, & hinc A, D primi non erunt; *contra hypothesin*. 13. 7.
23. 7.
21. 7.
20. def. 7.
11. ax. 7.

PROP. XVIII. PROBL.

Duobus numeris A, B datis, considerare, an tertius ipsis proportionalis inueniri possit.

1. *Cas.* Si A, B primi inter se sunt: ostensum iam ¹⁴ est, tertium proportionalem inueniri non posse. 16. 9.

A 4, B 6, C 9
B ² 36

2. *Cas.* Si A, B non sunt primi, & A metitur B ²: metiatur per C, qui erit tertius proportionalis. Quia enim $AC = B^2$: erit $A : B = B : C$. 9. ax. 7.
20. 7.

3. *Cas.*

A 6, B 4, C --
B² 16

3. *Caf.* Si vero A, B primi non sunt, nec A ipsum B² metitur: nequit tertius

proportionalis inueniri. Si negas: sit inuentus C. Quia ergo $AC = \frac{1}{2} B^2$: A metitur $\cdot B^2$; *contra hypotbesin.*

§. 20. 7.
e. 23. def. 7.

PROP. XIX. PROBL.

Tribus numeris datis A, B, C, considerare, an quartus ipsis proportionalis inueniri possit.

A 3, B 7, C 6, D 14
BC 42

1. *Caf.* Si A metitur BC: potest inueniri quartus propor-

tionalis D, is nempe per quem A ipsum BC metitur. Nam quia $AD = \pi BC$: erit $A : B = \epsilon C : D$.

e. 9. ax. 7.
s. 19. 7.

A 3, B 5, C 7, D --
BC 35

2. *Caf.* Si A non metitur BC: non potest quartus proportio-

nalis inueniri. Si quis enim esset D: ob $A : B = C : D$, foret $AD = \epsilon BC$, & igitur A metiretur πBC ; *contra hyp.*

e. 23. def. 7.

PROP. XX. THEOR.

Primi numeri plures sunt omni propofita multitudine primorum numerorum A, B, C.

e. 38. 7.

A 2, B 3, C 5
D 30

Sumatur enim π minimus D, quem ipsi A, B, C metiantur, & apponatur vnitas. Iam

fi $D + 1$ primus est: patet propositio.

A 5, B 3, C 7
E 53, D 105

Si vero $D + 1$ primus non est: metietur eum ν primus aliquis E, qui nulli ipsorum A, B, C

e. 33. 7.

B, C idem esse potest. Si enim alicui eorum idem esset: metiretur E quoque ipsum D, ergo & φ vnitatem. Q. E. A. Ergo novus numerus primus E inuentus est. Q. E. D. ϕ . 12. ax. 7.

PROP. XXI. THEOR.

A 4, B 6, C 8, $A + B + C$ 18

Si pares numeri quocunque A, B, C componantur: totus $A + B + C$ par erit.

Quia enim vnusquisque ipsorum A, B, C partem \propto dimidiam habet: totus etiam $A +$ \propto . 6. def. 7. $B + C$ partem dimidiam ψ habebit, & igitur ψ . 2. ax. 7. par erit. Q. E. D.

PROP. XXII. THEOR.

A 5, B 3, C 7, D 9, $A + B + C + D$ 24

Si impares numeri A, B, C, D quocunque componantur; multitudo autem ipsorum sit par: totus $A + B + C + D$ par erit.

Quia enim $A - 1$, $B - 1$, $C - 1$, $D - 1$ sunt numeri \propto pares, & multitudo vnitatum detractarum etiam par est: erit summa numerorum $A - 1$, $B - 1$, $C - 1$, $D - 1$ & vnitatum residuarum, id est summa $A + B + C + D$, numerus \propto par. Q. E. D. α . 21. 9.

PROP. XXIII. THEOR.

A 11, B 5, C 3, $A + B + C$ 19

Si impares numeri A, B, C quocunque componantur; & multitudo ipsorum sit impar: & totus $A + B + C$ impar erit.

Nam

$A \text{ n}, B \text{ s}, C \text{ 3}, A + B + C \text{ 19}$
 $\beta. 7. \text{ def. } 7.$ Nam quia $C - 1$ par ^{β} est, & $A + B$ idem
 $\gamma. 23. 9.$ par ^{γ} est: erit & $A + B + C - 1$ numerus ^{δ}
 $\delta. 21. 9.$ par. Ergo ^{β} patet numerum $A + B + C$ im-
 parem esse. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.

$A \text{ 12}$ Si a pari numero A par aufera-
 $B \text{ 4}$ tur B: & reliquus $A - B$ par erit.
 $\alpha. 6. \text{ def. } 7.$ $A - B \text{ 8}$ Quum enim tam A, quam B ha-
 beat partem dimidiam ^{γ} : habebit et-
 iam $A - B$ partem dimidiam, & igitur ^{γ} par
 erit. Q. E. D.

PROP. XXV. THEOR.

$A \text{ 12}$ Si a pari numero A impar B
 $B \text{ 5}$ C 4 auferatur: reliquus $A - B$ im-
 $A - B \text{ 7}$ par erit.
 $\beta. 7. \text{ def. } 7.$ Quum enim B ^{δ} constet ex pa-
 $\gamma. 24. 9.$ ri C & unitate; $A - C$ autem ^{γ} par sit: erit A
 $- C - 1$, id est $A - B$, numerus ^{δ} impar.
 Q. E. D.

PROP. XXVI. THEOR.

$A \dots C \dots D \dots B$ Si ab impari numero AB
 impar BC auferatur: reli-
 quus AC par erit.
 Ab utroque auferatur unitas BD. Ergo
 $\beta. 7. \text{ def. } 7.$ tam AD quam DC par ^{γ} erit; ergo & reli-
 $\gamma. 24. 9.$ quus AC. Q. E. D.

PROP. XXVII. THEOR.

$A \dots D \dots C \dots B$ Si ab impari numero AB
 par BC auferatur: reliquus
 AC impar erit.

Nam

Nam ablata vnitate AD, erit DB parⁿ. Er-^{n. 7. def. 7.}
 go DB — BC = DC par quoque^l est, & pro-^{n. 24. 7.}
 indeⁿ AC = DC + 1, impar. Q. E. D.

PROP. XXVIII. THEOR.

A... B.. *Si impar numerus A parem B*
 C... .. *multiplicans faciat aliquem: factus*
 C par erit.

Nam quum C componaturⁿ ex tot nume-^{n. 15. def. 7.}
 ris aequalibus ipsi B, quot in A sunt vnitates:
 patet C componi ex numeris paribus, ergo
 ipsum paremⁿ esse. Q. E. D. ^{n. 21. 9.}

* Schol. Eadem ratione, si A & B pares sunt:
 factus AB par est.

PROP. XXIX. THEOR.

A..., B..... *Si impar numerus A*
 C..... .. *imparem numerum B mul-*
 tiplicans faciat aliquem:
factus C impar erit.

Quia enim C componiturⁿ ex tot numeris^{n. 15. def. 7.}
 ipsi B aequalibus, quot A vnitates habet: pa-
 tet C componi ex multitudine impari nume-
 rorum imparium, ideoque imparemⁿ esse. ^{n. 23. 9.}
 Q. E. D.

* Schol. 1. Numerus A, numerum imparem C
 metiens, impar est, & per imparem B metitur.
 Si enim negas: aut neuter ipsorum A, B impar
 esset, ideoque nec C = AB imparⁿ esse posset; ^{n. sch. 28. 9.}
 contra hypothesin: aut alteruter tantum ipsorum
 A, B esset impar, & neque sic C possetⁿ impar esse; ^{n. 28. 9.}
 etiam contra hypothesin. Quare vterque A, B
 impar est.

2. Pairs numeri quadrati latus par est.

PROP.

PROP. XXX. THEOR.

A 3, B 12
C 4 *Si impar numerus A parem numerum B metiatur: & dimidium eius metietur.*

Metiatur enim A ipsum B per C: dico C non imparem esse; quia C posito impari, etiam $AC = B$ impar^r esset, contra hypothesin. Ergo C par erit; & A ipsum B pariter metietur, & ob id eius dimidium quoque^r metietur. Q. E. D.

* Cor. Impar numerus parem metitur per parem.

PROP. XXXI. THEOR.

A 3 B 5
2 B 10
C --- *Si impar numerus A ad aliquem numerum B fit primus: & ad ipsius duplum 2 B primus erit.*

Si negas, A & 2 B primos esse inter se: metiatur^v eos idem numerus C. Et ϕ . sch. 29. 9. quia A impar est: C quoque impar^p erit. χ . 6. def. 7. Sed quia C metitur ipsum 2 B, qui par^x est: metietur C etiam^{\psi} dimidium eius, nempe B. Ergo A & B non^v erunt primi inter se; *contra hypothesin.*

PROP. XXXII. THEOR.

1, A 2, B 4, C 8, D 16

Numerorum B, C, D, a binario A duplatorum, unusquisque pariter par est tantum.

Nam quia^a singuli B, C, D e binario facti ω . hyp. α . 6. def. 7. sunt: pares eos esse^a constat. Et quum praeterea^{\beta} $\div \div$ 1, A, B, C, D: binarius A singulos B, C

B, C, D metitur⁷ per aliquem ipsorum A, B, C, D. 7. cor. 11. 9.
 Ergo singuli B, C, D pariter pares⁸ sunt. De- 8. 8. def. 7.
 nique quia A primus est, ideoque ipsos B, C,
 D nullus numerus¹ metiri potest, qui non vnus 1. sch. 13. 9.
 ex ipsis A, B, C, D fit: singuli B, C, D pariter
 pares sunt tantum. Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

A 10 Si numerus A dimidium $\frac{1}{2}A$ habeat
 $\frac{1}{2}A$ 5 imparem: pariter impar est tantum.

Quia enim $\frac{1}{2}A$ metitur ipsum A per 2: pa-
 tet A esse² pariter imparem. Dico & tan- 2. 9. def. 7.
 tum: quia si etiam A ponas pariter parem,
 metietur⁷ eum aliquis par pariter, ideoque 7. 8. def. 7.
 idem par eius dimidium $\frac{1}{2}A$, qui impar est, 9. ax. 7.
 metietur⁹. Q. E. A. 1. sch. 29. 9.

PROP. XXXIV. THEOR.

A 20 Si par numerus A neque sit a bina-
 $\frac{1}{2}A$ 10 rio duplatus, neque dimidium $\frac{1}{2}A$ im-
 $\frac{1}{4}A$ 5 parem habeat: pariter par est, & pa-
 riter impar.

Nam A pariter parem esse, * manifestum 1. 8. def. 7
 est, quia $\frac{1}{2}A$ par est. Secundo, si $\frac{1}{2}A$ iterum
 bifariam diuiditur, & huius dimidium rursus
 bifariam, & sic porro, tandem proueniet nu-
 merus $\frac{1}{4}A$ impar, qui ipsum A per parem 4
 metietur¹. Nam si secus esset: perueniretur 1. cor. 30. 9.
 tandem ad binarium; & A foret a binario du-
 platus. Quod est contra hypothesin. Ergo
¹A est etiam pariter impar. Q. E. D. 1. 9. def. 7.

P

PROP.

PROP. XXXV. THEOR.

A.....

B....G.....C

D.....

E.....L.....K.....H.....F

Si sint quotcunque numeri A, BC, D, EF deinceps proportionales; auferantur autem a secundo BC & ultimo EF aequales primo CG, FH; erit ut secundi excessus BG ad primum A, ita ultimi excessus EH ad omnes ipsum antecedentes A + BC + D.

Positatur $FK = BC$, & $FL = D$. Hinc quia
 v. 3. ax. 2. $FH = CG$, erit $HK = GB$. Et quamvis sit
 §. 16. ax. 7. $EF : D = D : BG = BC : A$; erit $EF : FL =$
 e. sch. 13. 7. $FL : FK = FK : FH$, ideoque dividendo $EL :$
 $LF = LK : FK = KH : FH$, & ergo $BG : A =$
 §. 12. 7. $KH : FH = EH : LF + FK + FH = EH :$
 $A + BC + D$. Q. E. D.

PROP. XXXVI. THEOR.

 $\div 1, A 2, B 4, C 8, D 16$
 $E (= 1 + A + B + C + D) 31, ED 496$
 $\div E 31, F 62, G 124, H 248$
 $K \dots L \dots$

Si ab unitate quotcunque numeri A, B, C, D abinceps proportionales exponantur in dupla analogia, quoad totus compositus E primus fiat; & totus E in ultimum D multiplicatus faciat aliquem: factus ED perfectus erit.

Quot enim sunt A, B, C, D, tot sumantur ab E deinceps proportionales & in eadem ratione dupla, E, F, G, H. Ergo $A : D = E : H$.

e. 14. 7.

E: H. Hinc ob $ED = {}^r AH = {}^z H$: erunt 6. 19. 7.
 adhuc $\div E, F, G, H, ED$; & ergo $F - E: E$
 $= {}^r ED - E: E + F + G + H$. Est autem 7. 35. 9.
 ${}^r F - E = {}^z E - B = E$. Quare $ED - E =$ v. constr.
 $E + F + G + H$, & addito $E = 1 + A + B$
 $+ C + D$, erit $ED = 1 + A + B + C + D$
 $+ E + F + G + H$, qui singuli numeri par-
 tes sunt ipsius ED , quia ipsum ED tam num-
 merus ${}^o D$, ideoque $\times A, B, C$, quam ψH , ideo- 6. 8. ax. 7.
 que E, F, G o metiuntur. Denique dico nul- x. 11. 9. &
 lum alium, praeter eos, metiri ipsum ED , 11. ax. 7.
 Pone enim alium K , qui ipsum ED metiatur per v. dem.
 L . Quia igitur ob $KL = {}^r ED$ est $E: L = K:$ v. constr. &
 D ; K autem ipsum D non o metitur: neque 11. ax. 7.
 E ipsam L γ metietur. Erunt itaque E, L x. 9. ax. 7.
 primi inter se, ideoque o minimi eandem ra- 6. 13. 9.
 tionem habentium. Quare, quum fuerit $E:$ 7. 20. def. 7.
 $L = K: D$, L metietur o ipsum D , & proinde d. 31. 7.
 erit aliquis o ipsorum A, B, C . Sit $L = B$. s. 23. 7.
 Sed quia E, F, G sunt in eadem ratione, in
 qua B, C, D : erit ex aequo $E: B: D = E: G$,
 & hinc $BG = {}^r ED = \psi KL$. Quare quum
 sit $B: L = {}^r K: G$, & $B = L$: erit & $\gamma K = G$;
 contra hypothesin. Ergo nullus alius nume-
 rus praeter A, B, C, D, E, F, G & H ipsius ED
 pars o est. Quare $ED = A + B + C + D +$ 7. 3. def. 7.
 $+ E + F + G + 1$ perfectus o numerus est. 9. 21. def. 7.
 Q. E. D.

E V C L I D I S E L E M E N T O R V M L I B E R X.

* * * * *

DEFINITIONES.

1. *Commensurabiles magnitudines* dicuntur, quas eadem mensura metitur.

2. *Incommensurabiles* autem, quarum nullam esse communem mensuram contingit.

3. *Rectae lineae potentia commensurabiles* sunt, quum ea, quae ab ipsis fiunt, quadrata idem spatium metitur;

4. *Incommensurabiles* autem, quum quadrata, quae ab ipsis fiunt, nullum commune spatium metiri contingit.

5. His positis, ostenditur, cuicumque rectae lineae propositae rectas lineas, multitudine infinitas, & commensurabiles esse & incommensurabiles, alias quidem longitudine & potentia, alias vero potentia solum. Vocetur autem proposita *recta linea rationalis*;

6. Et huic commensurabiles, siue longitudine & potentia, siue potentia solum, *rationales*;

7. Incommensurabiles vero *irracionales* vocentur.

8. Et *quadratum*, quod a recta linea proposita fit, dicatur *rationale*;

9. Et

9. Et huic commensurabilia quidem *rationalia*;

10. Incommensurabilia vero dicantur *irrationalia*.

11. Et *lineae*, quae † incommensurabilia possunt, vocentur *irrationales*; si quidem ea quadrata sint, ipsorum latera; si vero alia quaequam rectilinea, ipsae a quibus aequalia quadrata describuntur.

† Puta irrationalia.

* Scilicet recta posse spatium dicitur, si quadratum ab ea descriptum spatio illi aequale est.

* In locum terminorum hic definitorum sequentes notas brevitatis studio substituiamus.

Σ est nota commensurabilium. Si quando scriptum fuerit $AB \Sigma CD$, leges: rectae AB , CD longitudine commensurabiles sunt. Et si inter plurium magnitudinum binas quasvis proximas hanc notam deprehenderis, cogitabis, eas omnes sibi inuicem commensurabiles esse. Sed, A non Σ B notat, spatia A , B incommensurabilia, vel rectas A , B longitudine incommensurabiles esse.

Θ nota est rectarum linearum potentia solum commensurabilium, siue longitudine tantum incommensurabilium.

Θ est nota rectarum potentia & longitudine incommensurabilium.

ρ notat quamvis magnitudinem rationalem.

α quamvis irrationalem magnitudinem designat.

$\sqrt{\quad}$ indicat rectam, quae spatium quoddam potest. E. gr. \sqrt{EF} est recta quae spatium EF potest. $\sqrt{(ABq - BCq)}$ est recta, cuius quadrato recta AB plus potest quam recta BC .

* *Postulatum.*

Postulatur, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excedat.

* *Axiomata.*

1. Magnitudo, quotcunque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.

2. Magnitudo, quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.

3. Magnitudo, metiens totam magnitudinem & ablatam, metitur & reliquam.

4. Omnis magnitudo se ipsam metitur.

5. Maior magnitudo minorem metiri nequit.

6. Si magnitudo toties magnitudinem continet, vel in ea continetur, quoties numerus unitatem, vel unitas in numero: magnitudinis ad magnitudinem eadem ratio est, quae numeri ad unitatem, vel unitatis ad numerum.

PROP. I. THEOR.

Duabus magnitudinibus AB, C expostis, si a maiori AB auferatur maius quam dimidium, & ab eo, quod reliquum est, rursus auferatur maius quam dimidium, & hoc semper fiat: relinquetur tandem quaedam magnitudo, quae minori magnitudine exposta C minor erit.

a. post. 10.



Sit enim * DE ipsius C multiplex ipsa AB maior, & sint eius partes $DF = FG = GE = C$. Auferatur ab AB dimidia maior BH, & a reliqua AH dimidia maior HK, & sic deinceps donec in AB partes AK, KH, HB aequae multae sint partibus DF, FG, GE. Jam quia DE

$DE > AB$, & ablata $EG < \frac{1}{2} DE$, & ablata $BH > \frac{1}{2} AB$: erit reliqua $DG > AH$. Eadem ratione erit $DF > AK$. Ergo $AK < C$. Q. E. D.

Aliter.

Fiant eadem quae antea, & praeterea in recta quadam capiantur relictæ AK æquales tot partes LM, MN, NO , quot sunt diuisiones in AB . Et quia $BH > \frac{1}{2} AB$: erit $BH > HA > KA$; ideoque $BH > ON$. Simili ratione est $HK > NM$. Ergo tota $AB > OL$. Hinc & $DE > AB > OL$. Est autem $DE:OL$ p. 15. 5. $= DF:LM$. Quare $DF > LM$, id est, $C > fch. 16. 5. > AK$. Q. E. D.

Idem demonstrabitur, etiam si non minus dimidio, sed ipsum dimidium, continue auferatur.

PROP. II. THEOR.

Si duabus magnitudinibus inæqualibus AB, CD expositis, detracta semper minore de maiore, reliqua minime præcedentem metiantur: magnitudines AB, CD incommensurabiles erunt.

Si negas: sit E ipsarum AB, CD communis mensura E . Iam quia AB diuidens ipsam CD relinquit aliquam CF se ipsa minorem, & hæc CF diuidens alteram AB etiam se ipsa minorem AG , & hoc semper fieri ponitur: relinquetur tandem aliqua $AG < E$. Quum vero E metiatur ipsam AB , & AB ipsam DF : E metiatur quoque ipsam DF .

P 4

Sed

2. 3. ax. 10.
5. 2. ax. 10.



4. 5. ax. 10.

Sed & totam CD metiri ponitur: ergo ² & reliquam FC metietur, & hinc quoque ¹ ipsam BG, quam CF metiebatur. Quare E, metiens AB, & BG, metietur quoque se ipsa minorem AG. Q. E. Aⁿ.

PROP. III. PROBL.

Duabus magnitudinibus commensurabilibus AB, CD datis, maximam earum communem mensuram inuenire.

Cas. 1. Si minor AB maiorem CD metitur: 3. liquet ³ ipsam AB esse maximam communem mensuram. Q. E. F.

1. 2. 10.



Cas. 2. Si minor AB maiorem CD non metitur: detrahatur, quoties fieri potest, AB de CD, & reliqua EC de AB, & sic deinceps, donec relinquatur aliqua AF, quae metiatur praecedentem EC; id quod tandem fiat ¹ necesse est.

2. 2. ax. 10.
3. 4. & 1.
ax. 10.
4. 1. ax. 10.

Quum ergo AF ipsam EC, & haec ipsam BF metiatur: AF quoque ² ipsam BF, & ergo ³ totam AB, ideoque ⁴ ipsam ED metietur. Sed eadem AF metitur ipsam EC: ergo ⁵ totam CD quoque metitur. Est ergo AF ipsarum AB, CD communis mensura. Dico autem & maximam esse. Si enim alia $G > AF$ metiretur utramque AB, CD: eadem G metiretur quoque ² ipsam ED, ergo & ¹ ipsam EC, & ³ ipsam

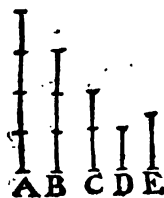
ipsam BF, & ipsam AF. Q. E. A^ē. Ergo ξ . 5. ax. 10.
AF est maxima vtriusque AB, CD mensura.

Q. E. F.

Cor. Ex hoc manifestum est, si magnitudo
G duas magnitudines AB, CD metitur, & maxi-
mam ipsarum communem mensuram AF metiri.

PROP. IV. PROBL.

*Tribus magnitudinibus commensurabilibus
A, B, C datis, maximam ipsarum communem
mensuram inuenire.*



Sumatur * duarum A, B ma- a. 3. 10.
xima communis mensura D.

Cas. 1. Si haec D metitur ter-
tiam C: erit factum.

Nam D communem esse men-
suram patet. Si vero maximam
esse negas: sit ea $E > D$. Er-
go E metietur * ipsam D. Q. E. A^ē. Qua- π . cor. 3. 10.
re D maxima communis mensura erit. Q. E. F. ξ . 5. ax. 10.



Cas. 2. Si vero D tertiam C
non metitur: fumatur * ipsarum
C, D maxima communis mensu-
ra E. Dico factum.

Primo enim sumi posse com-
munem mensuram ipsarum C, D
sic liquet. Quia A, B, C com-
mensurabiles ponuntur: erit ea-
rum * aliqua communis mensura. Haec, ip- ϵ . 1. def. 10.
sas A, B metiens, metietur quoque * ipsam
D, & ergo erit ipsarum C, D communis men-
sura.

r. 2. 3x. 10.

x. cor. 3. 10.

u. hyp.



ABCDEF

fura. Sit ea igitur E: & τ patet E esse communem trium A, B, C mensuram. Deinde si ponas aliam $F > E$ pro communi earundem mensura: metietur τ F ipsam D, & ν ipsam C, ideoque τ ipsam E. Q. E. A. Ergo E est maxima trium A, B, C mensura. Q. E. F.

Coroll. Hinc si magnitudo F tres metiatur magnitudines A, B, C: & ipsarum maximam communem mensuram E metietur.

PROP. V. THEOR.

Commensurabiles magnitudines A, B, inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

Quoniam $A \leq B$: metietur ρ eas aliqua C. Et quoties C metitur A, tot unitates sint in numero D, quoties autem C metitur B, tot sint unitates in E. Hinc est $\propto A : C$

$= D : 1$, & $C : B = 1 : E$, & ergo ex aequo $A : B = D : E$. Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.

Fig. Prop. V.

Si duae magnitudines A, B, inter se rationem habeant, quam numerus D ad numerum E: magnitudines A, B erunt commensurabiles.

Quot enim unitates sunt in D, in tot aequales partes diuidatur A, & vni harum sit $= C$. Est ψ ergo $1 : D = C : A$. Sed ponitur $D : E = A : B$. Quare ex aequo $1 : E = C : B$,

 ψ . 6. 2x. 10.

C : B, ideoque C metitur B. Metiebatur autem A. Ergo $A \propto B$. Q. E. D.

Aliter.



Quot unitates sunt in D, in tot partes aequales diuide A, earumque vni fit $= C$. Et quot unitates sunt in E, ex tot magnitudinibus ipsi C aequalibus componatur F. Ergo est ψ A : C $=$ D : 1, & C : F $=$ 1 : E, & ergo ex aequo A : F $=$ D : E.

Sed erat A : B $=$ D : E. Quare A : B $=$ A : F. Ergo $B = F$. Metitur autem C ipsam F, ^{a. 9. 3.} ergo & ipsam B. Sed eadem C metitur A. Ergo $A \propto C$. Q. E. D.

Coroll. Ex hoc manifestum est, si sint duo numeri D, E, & recta linea A, fieri posse vt numerus D ad E numerum ita rectam A ad rectam F. Si autem inter ipsas A, F media proportionalis G sumatur, fieri poterit, vt numerus D ad E numerum, ita figura quae fit a recta A ad figuram similem similiterque descriptam a recta G. Nam ^{a. 2. cor.} figura quae fit ab A est ad similem similiterque ^{20. 6.} descriptam a G $=$ A : F $=$ D : E.

PROP. VII. THEOR.

I *Incommensurabiles magnitudines A,*
I *B inter se rationem non habent, quam*
numerus ad numerum.

A **B** Si enim A ad B haberet rationem numeri ad numerum: foret ^{β} A \propto B; ^{β . 6. 10.} contra hyp.

PROP.

PROP. VIII. THEOR.

Si duae magnitudines A, B inter se rationem non habeant, quam numerus ad numerum: incommensurabiles erunt.

7. 5. 10.

Si enim esset $A \propto B$: foret γ A ad B vt numerus ad numerum; contra hyp.

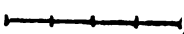
PROP. IX. THEOR.

Quae a rectis lineis A, B longitudine commensurabilibus sunt quadrata inter se rationem habent, quam quadratus numerus C^2 ad quadratum numerum D^2 . Et quadrata Aq, Bq inter se rationem habentia, quam quadratus numerus C^2 ad quadratum numerum D^2 , & latera A, B habebunt longitudine commensurabilia. Quadrata vero, quae a longitudine incommensurabilibus rectis lineis E, F sunt, inter se rationem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata Eq, Fq inter se rationem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

2. 5. 10.

6. 1. COR. 10. 6.

7. 11. 2.



C 4. C^2 16.D 3. D^2 9.

CD 12.

1. Sit $A \propto B$, & $A : B$ $= C : D$. Quia $Aq : Bq$ $= (A : B)^2$, & $C^2 : D^2 =$ $(C : D)^2$: erit $Aq : Bq =$ $C^2 : D^2$. Q.E.D.*Aliiter.*

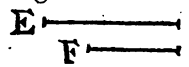
Sit $A \propto B$, & $A : B = C : D$, & sumatur
Rgl. sub A, B, nec non numerus CD. Ergo
erit

erit $A:B = C:D = C^2:CD$. Sed $A:B = Aq:A \times B$. Quare $Aq:A \times B = C^2:CD$. Rursus, quia $A:B = C:D = CD:D^2$, & $A:B = A \times B:Bq$: erit $A \times B:Bq = CD:D^2$. Ergo ex aequo $Aq:Bq = B^2:D^2$. Q. E. D.

2. Sit $Aq:Bq = C^2:D^2$: dico fore $A \leq B$. Quia enim $Aq:Bq = (A:B)^2$, & $C^2:D^2 = (C:D)^2$: erit $A:B = C:D$, & ergo $A \leq B$. Q. E. D.

Aliter.

Nam C^2, CD, D^2 deinceps proportionales sunt in ratione $C:D$. Et $Aq, A \times B, Bq$ in ratione $A:B$. Ergo $A:B = C^2:CD$. Ergo $A \leq B$. Q. E. D.

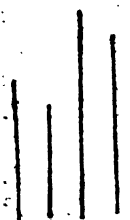
 3. Non sit $E \leq F$. Iam si dicas, Eq ad Fq esse ut numerus quadratus ad quadratum: erit $E \leq F$; contra hyp. Quare non est Eq ad Fq ut numerus quadratus ad quadratum. Q. E. D.

4. Non sit Eq ad Fq ut quadratus numerus ad quadratum. Iam si dicas $E \leq F$: erit Eq ad Fq ut quadratus numerus ad quadratum; contra hyp. Ergo E non $\leq F$. Q. E. D.

Corollar. Et manifestum est, ex iam demonstratis, lineas, quae longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse; quae vero potentia commensurabiles, non semper & longitudine (quum earum quadrata possint esse inter se ut numeri non quadrati); & hinc, quae longitudine incommensurabiles sunt, non semper & potentia incommensurabiles esse; quae vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

PROP.

PROP. X. THEOR.



A B C D

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, $A : B = C : D$; prima vero A secundae B fuerit commensurabilis; & tertia C quartae D commensurabilis erit. Et si prima A secundae B fuerit incommensurabilis; & tertia C quartae D incommensurabilis erit.

§. 5. 10.

¶. 6. 10.

¶. 7. 10.

¶. 8. 10.

1. Quia $A \propto B$: $\frac{1}{2}$ A ad B, ergo etiam C ad D, rationem habet quam numerus ad numerum. Ergo est $C \propto D$. Q. E. D.

2. Quia A non \propto B: non habet A ad B rationem*, quam numerus ad numerum. Sed $A : B = C : D$: ergo nec C ad D rationem habet numeri ad numerum. Ergo C non \propto D. Q. E. D.

* 1. Schol. Hinc si quatuor rectarum proportionalium prima A secundae B est potentia solum commensurabilis: tertia C quartae D etiam potentia solum commensurabilis erit. Quia enim $Aq : Bq = Cq : Dq$ (22. 6.) erit $Cq \propto Dq$. Et quia non est $C \propto D$, patet esse $C \in D$.

* 2. Schol. Et si rectarum proportionalium prima A \in secundae B: erit & tertia C \in quartae D.

L E M M A.

Diffimiles pluri numeri inter se rationem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Hoc manifestum est per 2. sch. 24. 8, & 26. 8.

PROP.

PROP. XI. PROBL.

A ————— B 4. *Proposita rectae*
 E ————— C 10. *lineae A inuenire*
 D ————— *duas rectas lineas*
incommensurabiles,
alteram quidem longitudine tantam, alteram
vero etiam potentia.

Exponentur duo numeri B, C , dissimiles *e. 21. def. 7.*
 plani, & fiat $B : C = Aq : Dq$. Erit $D \in A$. *e. cor. 6. 10.*
 Sumatur inter A, D media proportionalis E . *e. 13. 6.*
 Dico fore $E \in A$.

Nam quia B ad C non ϕ habet rationem nu- *e. lem. huf.*
 meri quadrati ad quadratum: nec Aq ad Dq
 eam rationem habebit. Ergo D ipsi A lon- *e. 9. 10.*
 gitudine incommensurabilis erit. Quia tamen
 Aq ad Dq rationem numeri ad numerum habet:
 erit D ipsi A potentia commensurabilis. *e. 6. 10. & 3.*
 Quare $D \in A$. *def. 10.*

Secundo quia $A : D = Aq : Eq$, & A non *e. 2. cor.*
 $\leq D$: erit quoque Aq non $\leq Eq$, & hinc E *20. 6.*
 $\in A$. $Q. E. D.$ *e. 10. 10.*
e. 4. def. 10.

* *Cor.* Patet etiam si duarum rectarum quadrata
 habeant rationem numeri ad numerum nec tamen
 quadrati numeri ad quadratum, rectas potentia so-
 lum commensurabiles esse.

* *Schol.* Simili ratione plures inueniri pos-
 sunt, expositae rectae potentia solum commensu-
 rabiles.

PROP.

PROP. XII. THEOR.

Quae A, B eidem magnitudini C sunt commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt.

7. 5. 10.

Quia $A \leq C$, & $B \leq C$; γ fit $A : C = D : E$, & $C : B = F : G$.
 $H_{910}. I_{676}. K_{793}$. Sumantur $\div \div H, I, K$

3. 4. 3.

B C A minimi δ in rationibus D ad E & F ad G. Ergo, quia $H : I = D : E$, erit $A : C = H : I$. Et quia $I : K = F : G$, erit $C : B = I : K$.
 Ergo ex aequo $A : B = H : K$. Quare $A \leq B$. Q. E. D.

6. 6. 10.

* *Schol.* Hinc omnis recta linea rationali lineae commensurabilis, est quoque rationalis (6. def. 10). Et quae rationalia spatia possunt, rationales sunt. Et omnes rectae rationales inter se commensurabiles sunt, saltem potentia. Item omne spatium rationali spatio commensurabile est quoque rationale (9. def. 10.) & omnia spatia rationalia inter se commensurabilia sunt.

PROP. XIII. THEOR.

A ————— Si sint duae magnitudines
 C ————— A, B, & altera quidem A
 B ————— eidem C fit commensurabilis,
 altera vero B incommensurabilis: magnitudines A, B inter se incommensurabiles erunt.

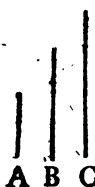
2. 12. 10.

Si enim esset $B \leq A$: quia & $C \leq A$, foret $B \leq C$; contra hypothesin.

* *Schol.* Magnitudines ergo, quarum altera est rationalis, altera irrationalis sunt inter se incommensurabiles.

PROP.

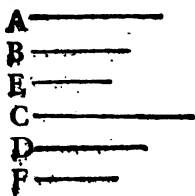
PROP. XIV. THEOR.


 Si duae magnitudines A, B commensurabiles sint; altera autem ipsarum A alicui magnitudini C sit incommensurabilis: & reliqua B eidem C incommensurabilis erit.

Si enim esset $B \leq C$: quia $A \leq B$, foret $A \leq C$; contra hypothesein.

* Schol. Hinc si duae rectae sint longitudine commensurabiles, altera autem ipsarum alicui rectae sit potentia solum commensurabilis: & reliqua eidem potentia solum commensurabilis erit.

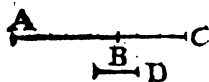
PROP. XV. THEOR.


 Si quatuor rectae lineae A, B, C, D proportionales fuerint; prima vero A tanto plus possit quam secunda B, quantum est quadratum rectae lineae E sibi commensurabilis longitudine: & tertia C tanto plus poterit quam quarta D, quantum est quadratum rectae lineae F, sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima A tanto plus possit quam secunda B, quantum est quadratum rectae lineae E sibi incommensurabilis longitudine: & tertia C quam quarta D tanto plus poterit, quantum est quadratum rectae lineae F sibi longitudine incommensurabilis.

Quoniam $A : B = C : D$: erit $Aq : Bq =$ 9. 22. 6.
 $Cq : Dq$. Sed $Aq = Bq + Eq$, & $Cq =$ " hyp.
 Q Dq

A ————— $Dq + Fq$: ergo $Bq + Eq$:
 B ————— $Bq = Dq + Fq$: Dq ; &
 x. 17. 5. E ————— diuidendo Eq : $Bq^* = Fq$:
 9. 22. 6. C ————— Dq . Quare $E : B =^9 F$:
 2. cor. 4. 5. D ————— D , & inuerſe $B : E =^A D$:
 F ————— F . Sed $A : B = C : D$: er-
 go ex aequo $A : E = C : F$. Hinc ſi ſit $A \leq$
 E, erit & $F \leq C$. Si vero non ſit $A \leq E$,
 nec erit $F \leq C$. Q. E. D.

PROP. XVI. THEOR.



*Si duae magnitudines com-
 mensurabiles AB, BC com-
 ponantur: & tota magnitu-
 do AC utrique ipsarum AB, BC commensura-
 bilis erit. Quod si tota magnitudo AC vni ip-
 sarum AB, BC sit commensurabilis: & quae a
 principio magnitudines AB, BC commensurabi-
 les erunt.*

1. 1. def. 10. 1. Quia $AB \leq BC$: ſit ' earum communis
 5. 1. ax. 10. meſura D . Ergo $\frac{1}{2} D$ metietur totam AC ;
 & hinc ' $AB \leq AC \leq BC$. Q. E. D.
 2. Quia $AC \leq AB$: ſit earum meſura D ,
 6. 3. ax. 10. quae etiam ' metietur ipſam BC . Ergo AB
 \leq ' BC . Q. E. D.

* Cor. Et ſimul patet, totam magnitudinem
 AC , quae vni partium AB commensurabilis ſit, re-
 liquae BC etiam commensurabilem eſſe.

PROP. XVII. THEOR.



*Si duae magnitudi-
 nes incommensurabiles
 AB, BC componantur:
 &*

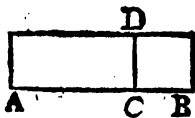
Et tota magnitudo AC utrique ipsarum AB, BC incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo AC uni ipsarum AB, BC sit incommensurabilis: Et quae a principio magnitudines AB, BC incommensurabiles erunt.

1. Si enim esset $AC \propto AB$: metiretur eas^{*} p. 1. def. 10.
 aliqua D, quae & reliquam BC metiretur. p. 3. ax. 10.
 Ergo esset $AB \propto BC$; contra hypothesin. Quare AC non $\propto AB$. Et eadem ratione AC non $\propto BC$. Q. E. D.

2. Si AC non $\propto AB$; & tamen $AB \propto BC$: metietur eas aliqua D. Ergo eadem D^o metietur totam AC, ideoque erit $AC \propto AB$; contra hypothesin. Ergo AB non $\propto BC$; quod etiam demonstrabitur similiter, si posita fuerit AC non $\propto BC$. Q. E. D. p. 1. ax. 10.

* Coroll. Et manifestum est^{*}, magnitudinem AC, quae uni suarum partium AB incommensurabilis est, reliquae etiam BC incommensurabilem esse. p. cor. 16. 10.

L E M M A.



Si ad aliquam rectam lineam AB applicetur parallelogrammum AD deficiens figura quadrata DB, parallelogrammum DA applicatum aequale est ei rectangulo, quod sub partibus AC, CB rectae lineae AB, ex applicatione factis, continetur.

Hoc per se patet, quia $CD = CB$.

Q 2

PROP.

PROP. XVIII. THEOR.

Si sint duae rectae lineae inaequales A, BC, quartae autem parti quadrati, quod sit a minori A, aequale parallelogrammum ad maiorem BC applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles BD, DC ipsam BC dividat: maior BC tanto plus poterit quam minor A, quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior BC tanto plus possit quam minor A, quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine commensurabilis; quartae autem parti quadrati, quod sit a minori A, aequale parallelogrammum ad maiorem BC applicetur, deficiens figura quadrata: in partes BD, DC longitudine commensurabiles ipsam BC dividet.



n. 5. 2.
 φ. hyp. &
 lemma.
 x. sch. 4. 2.
 ψ. hyp.
 α. 16. 10.
 α. cor. 16. 10.

1. Bifecetur enim BC in E, & fiat EF = ED. Ergo FB = DC; & $4 BD \times DC + 4 EDq = 4 ECq$. Sed $4 BD \times DC = Aq$, & $4 EDq = 4 FDq$, & $4 ECq = 4 BCq$. Ergo $Aq + 4 FDq = 4 BCq$, & hinc $BCq - Aq = 4 FDq$. Et quum sit $BD \leq DC$, ac ideo $BC \leq DC \leq DC + FB$: patet esse $BC \leq FD$. Q. E. D.

2. Sit $BD \times DC = \frac{1}{4} Aq$, & sit $BCq - Aq =$ quadrato rectae ipsi BC commensurabilis longitudine. Dico $BD \leq DC$. Nam, ut antea, ostenditur, esse FD rectam, cuius quadrato BC plus potest quam A. Quia ergo $BC \leq FD$: erit $BC \leq BF + DC$. Sed BF

$BF + DC^* \leq DC$. Ergo $BC \leq^{\beta} DC$, ac ideo β . 12. 10.
 $BD^* \leq DC$. Q.E.D.

PROP. XIX. THEOR.

Si sint duae rectae lineae inaequales A, BC, Fig. prop. XVIII. quartae autem parti quadrati, quod fit a minori A, aequale parallelogrammum ad maiorem BC applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine BD, DC ipsam BC diuidat: maior BC tanto plus poterit quam A minor, quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior BC tanto plus possit quam minor A, quantum est quadratum rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis; quartae autem parti quadrati, quod fit a minori A, aequale parallelogrammum ad maiorem BC applicetur, deficiens figura quadrata: in partes BD, DC longitudine incommensurabiles ipsam BC diuidet.

1. Iisdem enim, quae supra, constructis similiter ostendemus, $BCq - Aq = DFq$. Iam quia BD^{γ} non $\leq DC$: nec est $^{\delta} BC \leq DC$. γ . hyp.
 Sed $DC \leq FB + DC$: ergo BC non $\leq^{\epsilon} FB + DC$, & hinc $^{\zeta} BC$ non $\leq DF$. 2. 17. 10.
 Q. E. D. 3. 14. 10.

2. Quia $^{\gamma} BC$ non $\leq DF$: nec erit $BC \leq^{\delta} DC + BF$. Sed $DC + BF \leq DC$. Ergo BC^{ϵ} non $\leq DC$, nec $^{\delta} BD \leq DC$. Q. E. D. 2. cor. 17. 10.

Schol. Tria sunt genera linearum rectarum rationalium inter se commensurabilium. Aut enim duarum rectarum rationalium, longitudine inter se commensurabilium, altera aequalis est expositae rationali; aut neutra expositae rationali

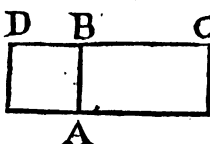
Q 3

aequa-

- aequalis est, longitudine tamen ei vtraque est commensurabilis; aut denique vtraque expositae rationali commensurabilis est solum potentia.

* Hi sunt illi modi, quos innuunt sequentia theoremata, vel supponunt. Notet hic etiam legens, si rectis lineis notam hanc $\rho \propto$ apponamus, nos intelligere rectas rationales longitudine & potentia commensurabiles; sin ipsis adscribamus notam $\rho \in$, intelligendas esse rationales potentia solum commensurabiles.

PROP. XX. THEOR.



Quod sub rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis AB, BC secundum aliquem praedictorum modorum, continetur

rectangulum AC rationale est.

- η . 8. vel 9. Describatur ex AB quadratum AD, quod ρ def. 10. erit. Atque, quum sit ρ AB \propto BC, & DB ρ hyp. = AB: erit DB \propto BC. Hinc, quia BD : BC \propto 1. 6. = AD : AC, est \propto AD \propto AC, ideoque ρ AC ρ . \propto 10. 10. Q. E. D. ρ 9. def. 10.

PROP. XXI. THEOR.

Fig. prop.
pracc.

Si rationale ad rationalem AB applicetur: latitudinem BC efficit rationalem, & ei AB, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.

- μ . 8. def. 10. Describatur ex AB quadratum AD, quod ρ v. 9. def. 10. rationale erit. Ergo AC \propto AD; hinc, quia ξ . 1. 6. AC : AD = ξ BC : BD vel AB, erit & BC \propto ρ 10. 10. AB, ideoque BC \propto ρ . Q. E. D. \propto 6. def. 10.

* Schol.

* *Schol.* Hinc quod sub rationali & irrationali continetur rectangulum, irrationale est.

PROP. XXII. THEOR.

Quod sub rationalibus potentia solum commen- Fig. prop.
surabilibus rectis lineis AB, BC continetur re- XX.
ctangulum AC irrationale est; & recta linea
ipsum potens est irrationalis; vocetur autem
Media.

Descriptum enim ab AB quadratum AD rationale erit. Et quia $AB = BD$: erit $BD \in BC$. Hinc, quum sit $BD:BC = AD:AC$, p. 1. 6. erit $AD \notin AC$. Quare AC^2 est $\alpha\lambda$, & σ . 10. 10. recta, quae ipsum AC potest, ν est $\alpha\lambda$. Q. v. 11. def. 10. E. D.

Schol. Media autem vocatur propterea, quod ipsius quadratum est rectangulo AC aequale, & ipsa media proportionalis est inter AB, BC latera.

* Rgl. etiam sub $\rho \in$ contentum, & spatium omne, quod media potest, *medium* vocatur.

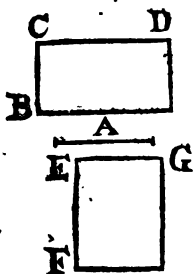
L E M M A.

Si sint duae rectae lineae AB, BC: erit, ut Fig. prop.
prima AB ad secundam BC, ita quadratum XX.
AD, quod fit a prima, ad rectangulum AC
quod sub duabus rectis lineis AB, BC continetur.

Descripto quadrato ex AB, compleatur Rgl. AC: & propositio manifesta erit ex 1. 6.

* *Schol.* Et ergo, ut vna BC ad alteram AB, ita $AB \times BC$ ad quadratum alterius AB.

PROP. XXIII. THEOR.



Quod sit a media A, ad rationalem BC applicatum, latitudinem CD efficit rationalem, & ei BC, ad quam application est, longitudine incommensurabilem.

Possit enim A Rgl. FG. Sed potest etiam ϕ BD. Ergo $FG = BD$. Et quia utrum-

ϕ . hyp.

\propto . 16. 6.

ψ . 22. 6.

\propto . 22. 10 &

hyp.

\propto . sch. 12. 10.

β . 10. 10.

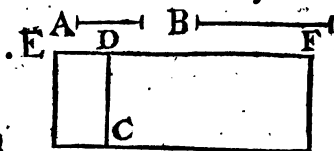
γ . lem. pr.

δ . 12. 10.

que spatium rectangulum ϕ est: erit $BC : EG = \propto EF : CD$, ac ideo $BCq : EGq = \psi EFq : CDq$. Iam quum $\propto FE$, EG sint $\beta \in$, & $BC \phi$ etiam β sit: erit $\propto BCq \propto EGq$, & hinc $\beta EFq \propto CDq$. Quare, quum EF sit β , erit \propto & $CD \beta$. Deinde quia $FE \in EG$, & $FE : EG \gamma = FEq : FGq$: erit $\beta FEq \text{ non } \propto FGq$. Ergo quum $EFq \propto CDq$, & $FGq \propto BDq$: erit $\beta CDq \text{ non } \propto BDq$, & hinc $\beta CD \text{ non } \propto BC$, quia $CDq : BDq = \gamma CD : BC$. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.

Mediae A commensurabilis B media est.



Exponatur CD β , ad quam applicetur Rgl. $CE = Aq$, & Rgl. $CF = Bq$. Ergo

\propto . 23. 10.

ϕ . hyp. vel

cor. 9. 10.

\propto . 1. 6. &

10. 10.

\propto . sch. 12. 10.

\propto . 13. 10.

\propto . 22. 10.

$ED \beta \in CD$. Iam quia $\propto Aq \propto Bq$: est & $CE \propto CF$, & hinc $ED \gamma \propto DF$. Quare DF est β & $\in CD$. Hinc patet \propto , CF esse β , & quae ipsum potest, B mediam esse. Q. E. D.

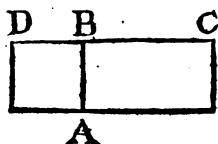
Coroll.

Coroll. Ex hoc manifestum est, spatium CF, medio spatio CE commensurabile, medium esse: nam quae ipsum potest B etiam media sit, necesse est.

Schol. Est autem cum mediis, sicut cum rationalibus, comparatum. Aliae mediae commensurabiles sunt potentia tantum; aliae vero longitudine, & ergo potentia simul.

* Et praeterea notandum est, hoc theorema verum esse, siue B mediae A longitudine & potentia commensurabilis sit, siue potentia solum.

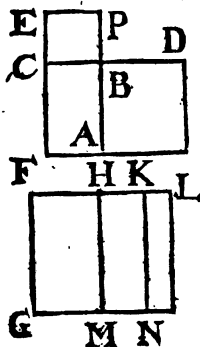
PROP. XXV. THEOR.



Quod sub mediis longitudine commensurabilibus rectis lineis AB, BC continetur rectangulum medium est.

Fiat ex AB quadratum AD, quod medium erit, quia AB media est. Iam est $DB = AB \propto BC$, & $BC : BD = AC : DA$: ergo AC \propto medio DA. Quare AC medium est. Q. E. D. μ . cor. 24. 10.

PROP. XXVI. THEOR.

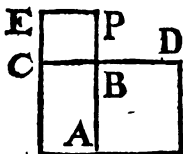


Quod sub mediis potentia solum commensurabilibus rectis lineis AB, BC continetur rectangulum AC vel rationale est, vel medium.

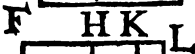
Describantur ex AB, BC quadrata AD, BE, quae media erunt. Exponatur FG ρ , ad quam applicetur Rgl. GH = AD; & ad HM applicetur Rgl. MK = AC, & ad

Q 5

§. 14. 1.



g. 23. 10.
r. hyp.



g. 1. 6.
r. 10. 10.
r. 20. 10.



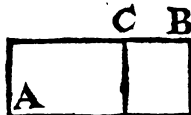
g. 22. 6.
q. 17. 6.
x. 6. def. 10.
ψ. 22. 10.

ad KN Rgl. $NL = BE$. Sunt ergo $\frac{1}{2}$ FH, HK, KL in directum, & GH, NL media. Porro, quia $FG = KN$ est ρ , etiam FH, KL \circ sunt $\rho \in$ FG. Sed est $AD \propto^r BE$, ideoque $GH \propto NL$, & quum sit $GH:NL = \circ$ FH:KL, erit $FH \propto^r \propto KL$. Quare quum FH, KL sint $\rho \propto$: erit $FH \times KL \rho$. Et quoniam $DB:BC = AB:BP$, & $AD:AC = AC:BE$, id est $GH:MK = MK:NL$, ac ergo, $FH:HK = \circ$ HK:KL. Hinc erit & ϕ HKq ρ , & ipsa \propto HK ρ . Ergo si sit $HK \propto FG$, erit \propto MK id est AC ρ : si vero sit $HK \in FG$: erit ψ AC medium. Q. E. D.

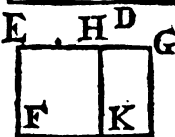
PROP. XXVII. THEOR.

Medium AB non superat medium AC rationali DB.

g. 45. 1.



g. sch. 12. 10.
β. cor. 24. 10.
γ. 23. 10.
δ. 21. 10.



g. lem. 23. 10.
ζ. 10. 10.

Si negas: sit DB ρ . Exponatur ρ EF, ad quam applicetur \propto Rgl. $FG = AB$, & Rgl. $FH = AC$. Erit ergo $KG = DB$, ideoque $KG \rho^a$; FH vero & FG erunt β media. Hinc γ EH & EG sunt $\rho \in$ EF, HG autem δ est $\rho \propto$ EF. Quare EH \in HG. Et quia EH:HG = \circ EHq: EH \times GH: erit EHq δ non \propto EH


EH \times HG. Sed quum EH, HG sint €: erit
 EHq + HGq ξ EHq. Et est 2 EH \times HG ξ ^{q. 16. 10.}
 EH \times HG. Quare ⁹ EHq + HGq non ξ 2 EH ^{9. 14. 10.}
 \times HG, & ergo EHq + HGq + 2 EH \times HG ^{6. 17. 10.}
 non ξ EHq + HGq, id est, * EGq non ξ EHq
 + HGq. Est vero EHq + HGq p. Ergo ^{a. 10. def. 10.}
 EGq [^] est $\alpha\lambda$, ac ipsa [^] EG $\alpha\lambda$. Sed erat quo- ^{u. 11. def. 10.}
 que EG p. Q. E. A.

* *Corollar.* Evidens est ex ostensis, si sint
 duae rectae EH, HG €, esse EHq + HGq non ξ
 2 EH \times HG.

* *Schol.* Manifestum autem est, rationale su-
 perare rationale rationali, & rationale cum ratio-
 nali facere rationale (per 1. & 3. ax. 10).

PROP. XXVIII. PROBL.

*Medias invenire, potentia solum
 commensurabiles, quae rationales con-
 tineant.*

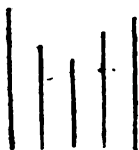
 Exponentur 2 duae rationales A, ^{u. 11. 10.}
 B €, & fiat ξ A : C = C : B, nec non ξ ^{6. 13. 6.}
 • A : B = C : D. Dico C € D esse, & mediam ^{6. 12. 6.}
 vtramque, & C \times D p.

Nam quia * A \times B medium est, erit & ^{u. 22. 10.}
 Cq € medium, & C media. Et quum sit A : ^{6. 17. 6.}
 B = C : D, ac A € B: erit * C € D. Hinc ^{6. sch. 10. 10.}
 & [^] D media est. Praeterea quum sit permu- ^{7. 24. 10.}
 tando A : C = B : D: erit C : B = B : D, &
 Bq = C \times D. Quare, ob Bq p ^{u. 9. def. 10.}
 \times D p. Q. E. D.

PROP.

PROP. XXIX. PROBL.

φ. 11. 10.
 χ. 13. 6.
 ψ. 12. 6.



Medias inuenire potentia solum commensurabiles, quae medium contineant.

Exponentur ϕ tres rationales ϵ , A, B, C, & fiat \propto A : D = D : B, & ψ B : C = D : E. Dico D, E esse quaesitas.

α. 17. 6.
 α. 22. 10.
 β. sch. 10. 10.
 γ. 24. 10.

Nam quia A, B $\rho \epsilon$, ac A \times B = α Dq : erit α Dq medium, & D media. Et quoniam B : C = D : E, ac B ϵ C : erit D $\beta \epsilon$ E. Ergo E etiam γ media est. Ostensum igitur est, D, E medias ϵ esse.

Praeterea quia est alternando B : D = C : E, & inuerse B : D = D : A, ideoque D : A = C : E : erit D \times E = A \times C. Est vero A \times C α medium : ergo & D \times E medium est. Q. E. D.

L E M M A I.

Inuenire duos numeros quadratos, ita ut qui ex ipsis componitur etiam quadratus sit.

A.....D.....C.....B

β. 24. &
 26. 9.
 α. 6. 2.
 γ. 1. 9.

Exponentur duo numeri plani similes vel quadrati, AB, BC : & sit vterque par, vel vterque impar. Nam ablato BC ex BA, relinquetur δ par AC, qui bisecari potest in D. Sed α qui fit sub AB, BC vna cum quadrato ex CD est aequalis quadrato ex BD, & is qui fit sub AB, BC ipse γ quadratus est : inuenti igitur sunt duo quadrati, nempe factus ex AB, BC, &

& quadratus ex CD, qui compositi producunt quadratum ex BD. Q. E. F.

Coroll. Et simul patet, quomodo inueniantur duo numeri quadrati, quorum excessus sit quadratus: si nimirum AB, BC similes plani sumantur. Sin dissimiles sumantur: possunt pari ratione haberi duo quadrati numeri, qui fiunt ex ED, BC, quorum excessus sit numerus sub AB, BC non quadratus.

L E M M A 2.

Inuenire duos quadratos numeros, ita ut qui ex ipsis componitur non sit quadratus.

A...G...H.D.E.F...C.....B

Factis omnibus quae in antecedenti Lemmate, & praeterea ex numero DC ablata unitate DE; dico quadratum factum ex AB per BC multiplicato vna cum quadrato ex CE non esse quadratum.

Quum enim, sicut antea, factus ex AB, BC sit quadratus, & hic vna cum CD componat quadratum ex BD: erit factus ex AB, BC, vna cum quadrato ex CE minor quadrato ex BD. Iam si fieri potest sit idem quadratus. Ergo aut quadrato maiori quam quadratus ex BE, aut minori, aut ipsi quadrato ex BE aequalis erit. Sed quadratus proxime maior, quam quadratus ex BE, est quadratus ex BD; & hoc is qui fit ex AB, BC vna cum quadrato ex CE minor est ostensus: ergo idem nulli quadrato maiori, eo qui fit ex BE, aequalis esse potest. Deinde ponatur aequalis quadrato ex BE; & capiatur GA duplus unitatis DE. Et quia
AC

2. 6. 2.

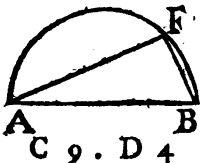
A..G..H.D.E.F...C.....B

$AC = 2 DC$: erit $GC = 2 EC$, & igitur factus ex GB, BC cum quadrato ex CE = quadrato ex BE. Hinc erit factus ex AB, BC aequalis facto ex GB, BC, & $AB = BG$. Q. E. A. Quare AB per BC multiplicatus cum quadrato ex CE non est aequalis ipsi quadrato ex BE. Si tandem ponas eundem aequalem quadrato minori quam quadratum ex BE, velut quadrato ex BF: sit $HA = 2 DF$; & erit rursus $HC = 2 CF$, & ideo factus ex HB, BC cum quadrato ex CF = quadrato ex BF. Hinc foret factus ex AB, BC + quadrato ex CE = facto ex HB, BC + quadrato ex CF. Q. E. A. Ergo tandem patet, quadratum factum ex AB, BC cum quadrato ex CE non quadratum esse. Q. E. F.

PROP. XXX. PROBL.

Invenire duas rationales potentia solum commensurabiles, ita ut maior plus possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis.

2. por. lem. 1.



Exponatur p AB, & sumantur⁹ duo quadrati numeri C, D, ita ut $C - D$ non sit quadratus, & in descripto super AB semicirculo aptetur AF, ut AF^2

1. cor. 6. 10. sit⁹ ad AB^2 uti numerus $C - D$ ad numerum C. Iungatur FB. Dico factum.

Quia enim AF^2 ad AB^2 rationem habet numeri ad numerum, non autem quadrati ad qua-

quadratum: erit $\text{AF} \in \text{AB}$, ideoque AF , AB 2. cor. 11. 10.
 sunt $\text{p} \in$. Sed quia $\text{C} : \text{C} - \text{D} = \text{ABq} : \text{AFq}$: 2. 6. def. 10.
 erit conuertendo $\text{C} : \text{D} = \text{ABq} : \text{ABq} - \text{AFq}$: 2. cor. 19. 5.
 id est BFq . Ergo $\sqrt{(\text{ABq} - \text{AFq})} = \text{BF}$ 31. 3. & 47. 1.
 AB . Q. E. F. 5. 9. 10.

PROP. XXXI. PROBL.

Inuenire duas rationales potentia solum commensurabiles, ita ut maior plus possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis. Fig. prop. XXX.

Exponentur p AB , & duo quadrati numeri C , D , qui nullum quadratum component, 1. lem. 2.
 & super AB describatur semicirculus, & fiat 2. cor. 6. 10.
 uti $\text{C} + \text{D}$ ad C ita ABq ad AFq , & iungatur FB . Dico factum.

Nam primo, ut antea ostenderetur, AF , AB esse $\text{p} \in$. Secundo quia $\text{C} + \text{D} : \text{C} = \text{ABq} : \text{AFq}$,
 erit conuertendo $\text{C} + \text{D} : \text{D} = \text{ABq} : \text{ABq} - \text{AFq}$ id est BFq . Ergo $\sqrt{(\text{ABq} - \text{AFq})} = \text{BF}$ 31. 3. & 47. 1.
 non $\leq \text{AB}$. Q. E. F. 5. 9. 10.

PROP. XXXII. PROBL.

Inuenire duas medias potentia solum commensurabiles, quae rationale contineant, ita ut maior plus possit, quam minor, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis.

Exponentur r duae rationales A , $\text{B} \in$, ita ut 2. 30. 10.
 $\sqrt{(\text{Aq} - \text{Bq})} \leq \text{A}$. Sit $\text{A} \times \text{B} = \text{Cq}$, & 2. 13. 6.
 $\text{Bq} = \text{C} \times \text{D}$. Dico C , D esse quacitas. 2. 45. 1.

Nam

z. 22. 10.

ψ. sch. lem.

23. 10.

α. lem 23. 10.

α. sch. 19. 10.

β. 24. 10.

γ. 15. 10.



Nam quia z $A \times B$ medium est: C media erit. Et quia Bq est ρ : etiam $C \times D$ erit ρ . Quia vero $A : B = \psi$ $A \times B : Bq = Cq : C \times D = \alpha$ $C : D$; & $A \in B$ erit quæque α $D \in C$, ideoque erunt C & D mediae \in . Denique quia $A : B = C : D$, γ erit $\sqrt{(Cq - Dq)} \leq C$. Q. E. F.

δ. 31. 10.

Similiter autem ostendetur inueniri posse duas medias potentia solum commensurabiles, & continentes rationale, ita ut maior plus possit, quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine^δ.

LEMMA.



Si fuerint tres rectæ lineæ AB, BC, CD in ratione aliqua: erit, ut prima AB ad tertiam CD , ita rectangulum contentum sub prima AB & media BC ad id quod sub media BC & tertia CD continetur.

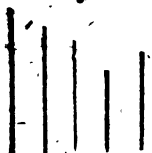
ε. 1. 6.

Ponantur AB, BC, CD in directum, & ducatur perpendicularis $AE = BC$, & compleantur $Pgra. EB, FC, GD$, quæ $Rgla.$ erunt. Et quia ergo $BC = EA = FB = GC$, erit $AB : BC = EB : FC = AB \times BC : FC$, similiter $BC : CD = FC : GD = FC : BC \times CD$. Ergo ex æquo $AB : CD = AB \times BC : BC \times CD$. Q. E. D.

PROP.

PROP. XXXIII. PROBL.

Invenire duas medias potentia solum commensurabiles, quæ medium contineant, ita ut maior plus possit, quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.



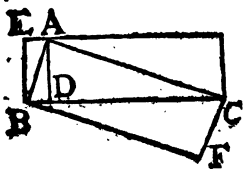
A D B E C

Exponentur tres rationales ϵ .
 A, B, C , ita ut $\sqrt{(Aq - Cq)} \leq$
 A , & fiat $Dq = A \times B$, & D
 $\times E = B \times C$: erunt D, E
 quæsitæ.

Nam quia $A, B \in \epsilon$: erit D
 media. Et quoniam $A : C = A \times B : C \times$
 $B = Dq : D \times E = D : E$: erit $D \in E$.
 Hinc D, E sunt mediae ϵ , atque $\sqrt{(Dq -$
 $Eq)} \leq D$. Patet etiam, quia $B \times C$ me-
 dium est, esse & $D \times E$ medium. Q. E. F.

Similiter ostenditur, quomodo inveni-
 tur duæ mediae potentia solum commensurabi-
 les, & medium continentes, ita ut maior plus
 possit, quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi
 incommensurabilis longitudine.

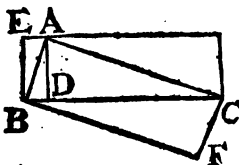
L E M M A.



Sit triangulum rectan-
 gulum ABC , rectum ha-
 bens angulum BAC , &
 ducatur AD perpendicu-
 laris: dico $CB \times BD$
 $= ABq$, & $BC \times CD$
 $= ACq$, & $BD \times DC = DAq$, & demique
 $BC \times AD = BA \times AC$.

R

Nam



Nam tres priores partes huius propositionis patent ex corollario 8.6 & ex 17.6. Ultima demonstratur, descripto Rglo. $EC = BC \times AD$,

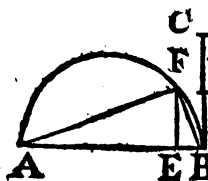
g. 47. 1.
g. 34. 1.

& Rglo. $AF = BA \times AC$. Nam $EC = 2 \Delta ABC = AF$. Q. E. D.

PROP. XXXIV. PROBL.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quae faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum vero, quod sub ipsis continetur, medium.

7. 31. 10.



u. 28. 6.

Exponantur AB, BC p ϵ , ita ut $\sqrt{(ABq - BCq)}$ non ϵ AB. Bisecetur BC in D, & ipsi BDq vel DCq aequale pgr. ad rectam AB applicetur^o, deficiens figura quadrata, & sine

AE, EB partes ex applicatione factae. Describatur super AB semicirculus AFB, & ex E ducatur in AB perpendicularis EF, & iungantur AF, BF; quae erunt quaesitae.

q. 4. 2.
x. 19. 10.
p. 1. 6.
a. lem. pr.
a. 10. 10.
p. 31. 3.
y. lem. 18. 10.
d. 1. 6.

Quum enim sit $BDq = \frac{1}{2} BCq$: erit \propto BE non ϵ EA. Et quia $AE:EB = \frac{1}{2} BA \times AE$: $AB \times BE = AFq:BFq$: erit \propto AF \propto BF. Porro, quia $AFq + BFq = ABq$, $AFq + BFq$ est p. Denique quia $EFq = AE \times EB = \frac{1}{2} BDq$, ideoque $BD = EF$, & $BC = 2 EF$: erit $AB \times BC = 2 AB \times EF = 2 AF$

AF \times FB. Sed AB \times BC medium¹ est: er- 1. 22. 10.
go & AF \times FB medium² erit. Q. E. F. 2. cor. 24. 10.

PROP. XXXV. PROBL.

Inuenire duas rectas lineas potentia in- Fig. prop.
commensurabiles, quas faciant compositum qui- XXXIV.
dem ex ipsarum quadratis medium, rectan-
gulum vero, quod sub ipsis continetur ratio-
nale.

Exponantur AB, BC¹ mediae € & ratio- 1. 32. 10.
nale continentes, ita vt $\sqrt{ABq - BCq}$
non \propto AB, & reliqua fiant, ut in praecedente.
Erunt AF, FB quaesitae.

Nam quia AE² non \propto EB: erit & BA \times AE 3. 19. 10.
non \propto AB \times BE, ideoque² AFq non \propto BFq, 1. 6. &
& propterea AF € BF. Et patet AFq + 10. 10.
BFq = ABq medium¹ esse. Denique quum 2. lem. 34. 10.
BC = 2 EF, & hinc AB \times BC =² 2 AB \times 1. 6.
EF: erit AB \times EF p, vtpote rationali AB \times
BC commensurabile¹. Ergo & AF \times BF 2. sch. 12. 10.
est p. Q. E. F.

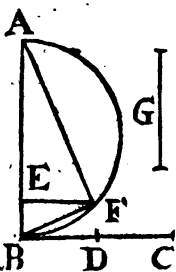
PROP. XXXVI. PROBL.

Inuenire duas rectas lineas potentia incom-
mensurabiles, quae faciant € compositum ex
ipsarum quadratis medium, & rectangulum,
quod sub ipsis continetur, medium & adhuc in-
commensurabile composito ex ipsarum quadra-
tis.

R 2

Ex-

ξ. 33. 10.



θ. 19. 10.

π. sch. 22. 10.

ρ. constr. &

λεπ. 18. 10.

σ. cor. 24. 10.

τ. lem. 34. 10.

υ. constr.

φ. 13. 10.

χ. 1. 6. &

10. 10.

Exponantur^ξ duae mediae Ε, AB, BC, medium continentes, ita ut $\sqrt{(AB \rightarrow BCq)}$ non ε AB. Reliqua fiant ut in prop. 34. Dico AF, FB esse quae sitas.

Nam AE non ε^θ EB, ideoque AF ε BF. Et quoniam ABq medium^π est: AFq +

FBq medium esse pater. Porro quia AE × EB

=^ρ BDq =^τ EFq: erit AB × BC = 2 AB ×

EF, & ideo^σ medium erit AB × EF, & propter-

ea etiam^τ AF × FB. Denique quia AB non

ε^υ BC, & BC ε^υ BD, & hinc AB non ε^φ BD:

erit^χ ABq non ε AB × BD. Sed AB × BD

= AB × EF = AF × FB, & ABq = AFq

+ FBq. Ergo AF × FB non ε AFq + FBq.

Q. E. F.

* Schol. Ex his manifestum est, quomodo inveniri possint duae mediae longitudine & potentia incommensurabiles. Factis enim omnibus, quae in propositione iussa sunt, & capta insuper G media proportionali inter AF, BF: erunt G & AB mediae ε. Nam quia Gq =^ψ AF × BF medio: erit G media, & ε mediae AB.

ψ. 17. 6.

Principium Senariorum per compositionem.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si duae rationales potentia solum commensurabiles AB, BC componentur: tota AC irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

Quia

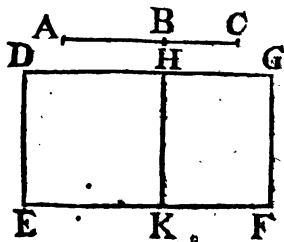
A | Quia enim $AB \in BC$, erit $2 AB \times BC \approx \alpha$. cor. 27. 10.
 B | non $\leq ABq + BCq$, & proinde $2 AB \times$
 C | $BC + ABq + BCq \approx^{\beta} ACq$ non $\leq^{\gamma} ABq$ β . 4. 2.
 $+ BCq$. Quare quum $ABq + BCq$ δ 7. 17. 10.
 fit p : erit $ACq \approx^{\epsilon} \alpha$, & $\approx^{\zeta} AC \approx^{\eta} \alpha$. Q. δ . sch. 27. 10.
 E. D. ϵ . sch. 12. 10.
 ζ . 11. def. 10.

PROP. XXXVIII. THEOR.

A B C Si duae mediae potentia so-
 lum commensurabiles AB, BC
 componantur, quae rationale contineant: tota
 AC irrationalis erit. Vocetur autem ex binis
 mediis prima.

Nam quum sit $ABq + BCq$ non $\leq 2 AB \times$
 BC : erit $ABq + BCq + 2 AB \times BC \approx ACq$ η . cor. 27. 10.
 non $\leq^{\theta} AB \times BC$: hinc $ACq \approx^{\iota} \alpha$, & ergo AC $\approx^{\kappa} \alpha$. θ . 17. 10. &
 $\approx^{\lambda} \alpha$. Q. E. D. ι . 14. 10.
 κ . sch. 12. 10.

PROP. XXXIX. THEOR.



Si duae mediae po-
 tentia solum commen-
 surabiles AB, BC
 componantur, quae
 medium contineant:
 tota irrationalis erit.
 Vocetur autem ex bi-
 nis mediis secunda.

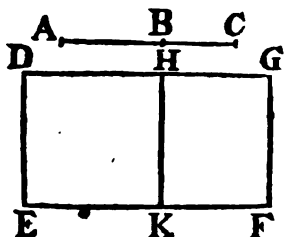
Sit DE p , & fiat $Rgl. DEF \approx ACq$, & $Rgl. \approx^{\mu} 45. 1.$
 $DEK \approx ABq + BCq$. Ergo $Rgl. HF \approx^{\nu} 2$ μ . 4. 2.
 $AB \times BC$. Et quia ABq, BCq mediae sunt, ν . sch. 22. 16.
 ac propterea $ABq + BCq$ medium est, ν . 16. 10. &
 medium vero est & $AB \times BC$: erit utrumque $\approx^{\xi} \alpha$. cor. 24. 10.
 R 3- ξ . hyp.

Rgl.

e. cor. 14. 10.

e. 27. 10.

g. cor. 27. 10.



Rgl. DK, HF • medium. Ergo EK, KF erunt • p. Sed quia $AB \in BC$, erit $ABq + BCq$ non $\leq 2 AB \times BC$, id est Rgl. DK non \leq HF. Quare est EK non \leq KF, &

e. sch. 12. 10. ideo EK, KF p • sunt, & • DG vel EF α .
 7. 37. 10. Paret ergo DF esse • α , & ipsam AC • α .
 7. sch. 21. 10.
 9. 11. def. 10. Q. E. D.

PROP. XL. THEOR.

A B C Si duae rectae lineae potentia incommensurabiles AB, BC componentur, quae faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium: tota recta linea AC irrationalis erit. Vocetur autem maior.

x. 22. 10. & Nam $AB \times BC$ non $\leq x ABq + BCq$. Er-
 sch. 13. 10. go $2 AB \times BC + ABq + BCq = ACq$ non
 7. 17. 10. $\leq \psi ABq + BCq$; & hinc • $ACq \alpha$, ac AC
 a. 10. def. 10. α . Q. E. D.

PROP. XLI. THEOR.

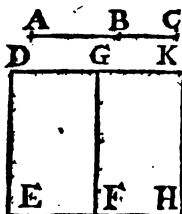
A B C Si duae rectae lineae potentia incommensurabiles AB, BC componentur, quae faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale: tota recta linea AC irrationalis erit. Vocetur autem rationale ac medium potens.

Nam,

Nam, quia $AB \times BC$ non $\varepsilon^a ABq + BCq$, *a. sch. 13. 10.*
 ideoque ACq non $\varepsilon^b AB \times BC$: erit ACq *& 22. 10.*
 $\alpha\lambda$ γ , ac ergo $AC \alpha\lambda$. Q. E. D. *β . 4. 2. & 17. 10.*

γ . 10. def. 10.

PROP. XLII. THEOR.



*Si duae rectae lineae po-
 tentia incommensurabiles AB,
 BC componentur, quae faciant
 compositum ex ipsarum qua-
 dratis medium, & quod sub
 ipsis continetur medium, &
 adhuc incommensurable com-
 positum ex ipsarum quadratis:*

*tota recta linea
 AC irrationalis erit. Vacetur autem bina me-
 dia potens.*

Exponatur p DE, & fiat δ Rgl. $DEF = ABq$ *2. 45. 1.*
 $+ BCq$, & Rgl. $GFH = 2 AB \times BC$. To- *a. 4. 2.*
 tum ergo $DH^2 = ACq$, & ζ DF medium, *2. cor. 24. 10.*
 ideoque η EF p . Eadem ratione FH p . Sed *11. 23. 10.*
 quia DF non ε^b GH: erit EF non ε^c FH, & *3. hyp.*
 ergo EF, FH p . Erunt, atque η EH $\alpha\lambda$ ex bi- *1. 10. 10.*
 nis nominibus erit. Hinc, quia DE p , est DH $\alpha\lambda$ *2. 37. 10.*
 $\alpha\lambda$, & AC $\alpha\lambda$. Q. E. D. *a. sch. 21. 10.*
 μ . 11. def. 10.

Schol. At vero dictas. irrationales vno tantum
 modo diuidi in rectas lineas, ex quibus compo-
 nuntur, & quae propositas. species constituent,
 mox demonstrabimus.

$\circ R$ 4

PROP.

PROP. XLIII. THEOR.



Quae ex binis nominibus
AB ad unum duntaxat pun-
ctum C diuiditur in nomi-
na AC, CB.

Si negas; diuidatur etiam ad D in nomi-
 na. Sed nequit esse $DB = AC$. Sic
 enim foret $BC = AD$, & $AC : CB = BD : DA$, hoc est AB in D similiter foret diuisa ac
 in C; id quod non ponitur. Quum ergo AB
 in partes inaequales ad C, & D secta sit, quarum
 maior sit AC: erit $2 AD \times DB = 2 AC \times$
 $CB = ACq + CBq - (ADq + DBq)$. Sunt
 autem ACq, CBq, ADq, DBq p, ideoque
 $ACq + CBq$, & $ADq + DBq$ differunt ra-
 tionali. Quare & media $2 AD \times DB$ ac 2
 $AC \times CB$ differunt rationali. Q. E. A.

PROP. XLIV. THEOR.



Quae ex binis mediis prima AB ad unum
duntaxat punctum C diuiditur in nomina AC,
CB.

Si negas; sit AB etiam in D diuisa in alia
 nomina AD, DB, quae erunt mediae e &
 continentes p. Sunt vero & AC, CB mediae
 rationale continentes, & differentiae inter 2
 $AD \times DB$ & $2 AC \times CB =$ differentia in-
 ter summam $ACq + CBq$ & summam ADq
 $+ DBq$. Ergo erit haec differentia ratio-
 nale spatium. Q. E. A.

PROP.

PROP. XLV. THEOR.



Quae ex binis mediis secunda AB ad unum duntaxat punctum C diuiditur in nomina AC, CB.

Si negas, diuidatur etiam in D, & fit AC non aequalis ipsi BD, sed ea e. gr. maior.

Ergo tam AC & CB, quam

AD & DB sunt \propto mediae \in & media continentes; ac $ACq + CBq > ADq + DBq$. Ex- \propto 39. 10.
 ψ 3. sch. 5.2.

ponatur p EF, ad quam applicetur Rgl. $EK = ABq$, & Rgl. $EG = ACq + CBq$, & Rgl. $EL = ADq + DBq$. Ex quo sequitur Rgl. $HK = 2 AC \times BC$, & Rgl. $MK = 2 AD \times DB$. \propto 4. 2.

Quia autem mediae \in sunt AC, CB: erit EG \propto \propto cor. 24. 10.
& 16. 10.
 β 23. 10.

medium, ideoque β EH p \in EF. Eadem ratione HN est p \in EF. Verum AC \in CB, & proinde $ACq + CBq$ id est EG non \propto γ cor. 27. 10.

ipsi $2 AC \times CB$ id est ipsi HK, & idcirco EH non \propto HN. Patet itaque EH, HN esse p \in , & ergo δ EN \propto ex binis nominibus, & diui- δ 37. 10.

sam in nomina in puncto H. Sed eodem modo ostenderetur, EN etiam ad M diuisam esse in nomina. Neque tamen est $MN = EH$, quoniam $EG = ACq + CBq > ADq + DBq > 2 AD \times DB = MK$. Ergo EN quae ex binis nominibus ad duo puncta in nomina diuisa est. Q. E. A.

\propto 43. 10.

R ;

PROP.

PROP. XLVI. THEOR.

D C

A ————— B

Maiores AB ad idem duntaxat punctum C diuiditur in nomina AC, CB.

Si negas: diuidatur ad aliud punctum D in nomina AD, DB, ab ipsis CB, AC diuersa. Erit ergo $\angle ACq + CBq \neq$, item $ADq + DBq \neq$, media vero erunt $AC \times CB$, & $AD \times DB$. Proinde, quum $ACq + CBq - (ADq + DBq) \neq$ sit \neq , & $=^s 2 AD \times DB - 2 AC \times CB$; erit differentia inter media $AD \times DB$ & $AC \times CB$ rationale spatium. Q. E. A.

PROP. XLVII. THEOR.

D C

A ————— B

Rationale ac medium potens AB ad unum duntaxat punctum C diuiditur in nomina AC, CB.

Si negas, diuidatur etiam ad D. Erunt ergo $ACq + CBq$, & $ADq + DBq$ media, sed $AC \times CB$, ac $AD \times DB$ rationalia. Quare, quum $ACq + CBq - (ADq + DBq) =^s 2 AD \times DB - 2 AC \times CB$, haec autem differentia \neq sit \neq : erit & illa \neq . Q. E. A.

PROP. XLVIII. THEOR.

A D C B

E M H N

Bina media potens AB ad unum duntaxat punctum C diuiditur in nomina AC, CB.



Si negas, diuidatur etiam in nomina AD, DB, diuersa ab illis, ita vt sit e. gr. $AC > DB$. Ad rationalem EF appli-

applicentur Rgl. $EG = ACq + CBq$, $EK = ABq$, & $EL = ADq + DBq$. Ergo $HK = \frac{1}{2} \xi$. 4. 2.
 $2 AC \times CB$, & $MK = 2 AD \times DB$. Sed
 quia ponitur $ACq + CBq$ medium, erit & EG ^{o. 42. 10.}
 medium, & proinde HE p . Eodem argu- ^{π. 23. 10.}
 mento HN est p . Quia vero & ponitur ACq
 $+ CBq$ non ξ $2 AC \times CB$: erit EH non ξ ^{g. 10. 10. &}
 HN . Itaque EH , HN erunt p e ; & EN ex ^{1. 6.}
 binis nominibus est τ , atque diuisa in nomina ^{sch. 12. 10.}
 in puncto H . Atqui similiter ostendetur, quia
 & $ADq + DBq$ nec non $AD \times DB$ media
 non ξ ponuntur, eandem EN etiam ad M in
 nomina diuidi, ita vt MN , EH inaequalia sint.
 $Q. E. A$. ^{u. 43. 10.}

DEFINITIONES SECVNDAE.

1. Exposita rationali, & quae ex binis nominibus diuisa in nomina, cuius maius nomen plus possit, quam minus, quadrato rectae lineae sibi longitudine commensurabilis: si quidem maius nomen expositae rationali commensurabile sit longitudine, tota dicatur *ex binis nominibus prima*;

2. Si vero minus nomen expositae rationali longitudine sit commensurabile, dicatur *ex binis nominibus secunda*;

3. Quod si neutrum ipforum nominum sit longitudine commensurabile expositae rationali, vocetur *ex binis nominibus tertia*.

4. Rursus, si maius nomen plus possit, quam minus, quadrato rectae lineae sibi longitudine incommensurabilis: si quidem maius
 nomen

nomen expositae rationali sit commensurabile longitudine, dicatur *ex binis nominibus quarta*;

5. Si vero minus, dicatur *quinta*;

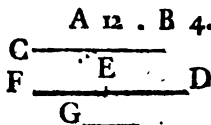
6. Quod si neutrum, dicatur *sexta*.

PROP. XLIX. PROBL.

Invenire ex binis nominibus primam.

φ. cor. lem.

1. 30. 10.



Exponentur φ duo numeri A, B ita ut A + B ad B quidem habeat rationem numeri quadrati ad

2. cor. 6. 10.

quadratum, sed non ad A. Exponatur quoque ρ C, & ei ξ DE, & fiat α A + B : A = DEq : EFq; erit DF quaesita.

α. cor. 11. 10.

β. 6. def. 10.

γ. 37. 10.

Nam quia ratio numeri A + B ad A non est ratio quadrati ad quadratum: erit EF € DE. Et quia DE ρ est β: erunt DE, EF ρ €; & idcirco DF erit γ ex binis nominibus. Porro quia A + B : A = DEq : EFq, & A + B > A: erit DEq > δ EFq, & DE > EF. Sit Gq = DEq — EFq. Et quia est convertendo A + B : B = DEq : Gq: erit G id est √ (DEq — EFq) ξ α DE. Est vero etiam DE ξ C.

ε. 9. 10.

ζ. 1. def. sec.

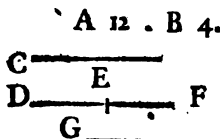
Ergo DF est ex binis nominibus ζ prima. Q. E. F.

PROP. L. PROBL.

Invenire ex binis nominibus secundam.

η. cor. lem.

1. 30. 10.



Exponentur η duo numeri A, B, ita ut A + B ad B quidem rationem habeat numeri quadrati ad

ad quadratum, non autem ad A, & sint C,
 $FE \propto \varepsilon$, & fiat $A : A + B = FEq : EDq$. 9. cor. 6. 10.
 Erit FD quaesita.

Quoniam enim ratio $A + B$ ad A non est
 quadrati numeri ad quadratum: erit $ED \notin$. sch. 11. 10.
 FE , & ergo* erunt ED, $FE \propto \in$. Ex binisⁿ. 6. def. 10.
 ergo nominibus erit FD. Praeterea vero quum,
 ob $A < A + B$, sit $FE <^{\wedge} ED$, & sit inuerseⁿ. sch. 16. 5.
 $A + B : A = DEq : FEq$, & conuertendo A
 $+ B : B = EDq : EDq - FEq$: posito $Gq =$
 $EDq - FEq$, erit G id est $\sqrt{(EDq - FEq)}$
 $\varepsilon^{\wedge} ED$. Est autem & minus nomen $FE \varepsilon C$. 12. 9. 10.
 Quare FD est ex binis nominibus secundaⁿ. v. 2. def. sec.
 Q. E. F.

PROP. LI. PROBL.

Inuenire ex binis nominibus tertiam.

A 12 . B 4. Cape^t tres numeros A, 3. cor. lem.
 C 8. B, C, tales vt $A + B$ ad B 1. 30. 10.
 D _____ quidem rationem qua-
 E _____ G drati numeri ad quadra-
 F rum habeat, non autem ad
 H _____ A, C vero ad neutrum ip-
 forum A, $A + B$ talem habeat rationem. Accipe

$\propto D$, & fac $C : A + B = Dq : EFq$, & $A + B : A =$ cor. 6. 10.
 $= EFq : FGq$. Erit EG quaesita.

Etenim quia $D \notin EF$, & $FG \notin EF$, & hincⁿ. sch. 11. 30.
 $EF, FG \propto$ sunt, erit EG ex binis nominibusⁿ. Etⁿ. 37. 10.
 quum sit $C : A + B = Dq : EFq$, atque $A +$
 $B : A = EFq : FGq$, ideoque ex aequo $C : A$
 $= Dq : FGq$: eritⁿ FG non εD . Sed & EFⁿ. 9. 10.
 non εD . Ergo neutrum nomen EF, FG $\varepsilon \propto$
 D. Deinde quia $A + B > A$, eritⁿ $EF > FG$. 7. sch. 16. 5.

Sit

6. 9. 10. Sit autem $Hq = EFq - FGq$. Et quia est
 u. 3. def. sec. conuertendo $A + B : B = EFq : Hq$, erit H
 id est $\sqrt{(EFq - FGq)} \leq EF$. Quare EG
 est ex binis nominibus tertia. Q. E. F.

PROP. LII. PROBL.

Inuenire ex binis nominibus quartam.

φ. cor. lem. A 10. B 6. Sume ϕ duo numeros A, B
 1. 30. 10. C _____ ita ut $A + B$ neque ad A ne-
 D _____ F que ad B rationem quadrati
 E numeri ad quadratum habeat,
 G _____ & expositae ρ C sume $\leq DE$,
 x. cor. 6. 10. & fac x $A + B : A = DEq : EFq$. Erit DF
 quaesita.
 ψ. 6. def. 6. Nam erit ψ DE ρ , & EF ϵ DE, & ergo
 ω. sch. 11. 10. erunt DE, EF ρ ϵ . Hinc DF erit β ex bi-
 α. sch. 12. 10. nis nominibus. Porro quia $A + B > A$, erit
 β. 37. 10. DEq $> \gamma$ EFq. Sit Gq $= DEq - EFq$. Ergo
 γ. sch. 16. 5. quia conuertendo $A + B : B = DEq : Gq$, non
 2. 9. 10. erit G id est $\sqrt{(DEq - EFq)} \leq DE$. Est
 α. 4. def. sec. autem & DE $\leq C$. Ergo DF est ex binis no-
 minibus quarta. Q. E. F.

PROP. LIII. PROBL.

Inuenire ex binis nominibus quintam.

Fig. prop.
 praec.

Expositis numeris A, B talibus, quales in
 praecedente erant, & recta ρ C, sume FE $\leq C$,
 & fac $A : A + B = FEq : EDq$; erit FD quae-
 sita.

2. 6. def. 6. Etenim erit δ FE ρ , & ED ϵ FE, ideoque
 η. sch. 11. 10. FE, ED erunt ρ ϵ . Hinc FD erit ex binis
 θ. sch. 12. 10. nominibus. Dein quia est inuertendo $A + B :$
 α. 37. 10. $A =$

$A = EDq : FEq$: erit $EDq^* > FEq$. Sit EDq z. sch. 16. 5.
 $— FEq = Gq$. Conuertendo igitur erit A
 $+ B : B = EDq : Gq$, & propterea G id est $\sqrt{(EDq — FEq)}$ non $\leq^A ED$. Sed est quoque z. 9. 10.
 $FE \leq C$. Ergo FD erit z. 5. def. sec. ex binis nominibus
 quinta. Q. E. F.

PROP. LIV. PROBL.

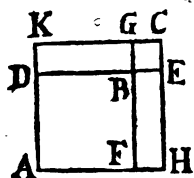
Inuenire ex binis nominibus sextam.

A 16. B 4. Exponentur duo nu-
 C 12. meri A, B ita' vt $A + B$ z. 2. lem. 30.
 D _____ ad neutrum habeat ratio- 10. & 1. sch.
 E _____ nem numeri quadrati ad 24. 8.
 H _____ F quadratum, & alius C z. 2. sch.
 non quadratus, qui nec 24. 8.
 ad A nec ad $A + B$ rationem quadrati ad
 quadratum habeat. Exponatur etiam rationa-
 lis D, & fiat $C : A + B = Dq : EFq$, & A z. cor. 6. 10.
 $+ B : A = EFq : FGq$. Erit EG quaesita.

Erit enim $EF \in D$, & $FG \in EF$, ideo- z. sch. 11. 10.
 que, quum D ρ sit, EF, FG $\rho \in$ erunt. Pro-
 pterea EG erit ex binis nominibus. Et quia z. 37. 10.
 $A + B > A$, erit $EFq^* > FGq$. Sit EFq z. sch. 16. 5.
 $— FGq = Hq$. Iam conuertendo est $A +$
 $B : B = EFq : Hq$. Ergo H id est $\sqrt{(EFq —$
 $FGq)}$ non $\leq^r EF$. Et quia ex aequo $C : A$ z. 9. 10.
 $= Dq : FGq$, erit $FG \in^* D$. Ergo neutrum z. 6. def. sec.
 nominum EF, FG $\leq D$. Quare EG est ex bi-
 nis nominibus^r sexta. Q. E. F.

LEM-

L E M M A.



Si duo quadrata AB, BC ponantur ita, ut DB sit in directum ipsi BE, & compleatur AC parallelogrammum: dico AC quadratum esse, & inter quadrata AB, BC re-

ctangulum DG medium esse proportionale, itemque inter ipsa AC, CB medium esse proportionale DC.

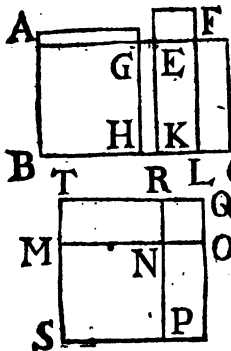
¶ 14. 1.

Quia enim DB, BE in directum sunt: erunt & FB, BG^o in directum. Et quia DB = FB, & BE = BG, erit DE = FG. Sed quum AC pgr. sit, erit AH = KC = DE, & AK = CH = FG. Ergo AC aequilaterum est. Sed &

z. sch. 29. 1.
ψ. 1. 6.

rectangulum z. Ergo AC est quadratum. Secundo, quia AB : DG = FB : BG = DB : BE = DG : BC, patet DG esse medium proportionale inter AB, BC. Tertio, quia AC : DC = AK : KD = KC : GC = DC : CB, patet ÷ AC, DC, CB. Q. E. D.

PROP. LV. THEOR.



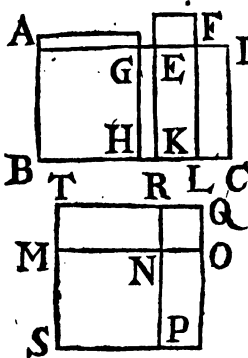
Si spatium ABCD contineatur sub rationali AB & ex binis nominibus prima AD: recta linea spatium ABCD potens irrationalis est, quae ex binis nominibus appellatur.

Divide AD in nomina ad E, & sit AE > ED. Ergo AE, ED p e, & √ (AEq

¶ 1. def. sec.

$(AEq - EDq) \leq AE$, & $AE \leq AB$. Bifeca
 ED in F, & ad AE applica Rgl. $= EFq$, &
 deficiens figura quadrata. Fiant ex applica-
 tione partes AG, GE. Ergo $AG \times GE = EFq$, &
 $AG \leq GE$. Duc ad AB parallelas GH, EK, FL, & pone quadratum $SN = AH$,
 & quadratum $NQ = GK$, ita ut MN, NO
 sint in directum, & comple Pgr. SQ. Ergo $SQ = MOq$, & $\div SN, MR, NQ$. Atqui
 quum sit $AG \times GE = EFq$, & ergo $AG : EF$
 $= EF : GE$: erit $AH : EL = EL : GK$, id est
 $\div SN, EL, NQ$. Ergo $EL = MR$. Sed
 $FC = EL = MR = OP$. Ergo totum AC
 $=$ toti SQ, ideoque recta MO potest AC. Et
 quia $AG \leq GE$: erunt AG, GE $\leq AE$, ergo
 & ipsi AB; & ergo AG, GE erunt p , & ob id
 AH, GK p . Quoniam igitur & SN, NQ p
 sunt, erunt MN, NO p . Quia vero AE \leq
 AG, & ED \leq EF, sed AE non \leq ED: nec erit
 AG \leq EF. Ergo AH non \leq EL, & SN
 non \leq MR. Hinc, quia $SN : MR = MN :$
 NO, non erit MN \leq NO. Quare MN, NO
 erunt p , & MO id est \sqrt{AC} ex binis nomi-
 nibus erit. Q. E. D.

PROP. LVI. THEOR.



Si spatium ABCD contineatur sub rationali AB & ex binis nominibus secunda AD: recta linea spatium AC potens irrationalis est, quae ex binis mediis prima appellatur.

Iisdem enim constructis, quae in praecedente, eodem modo ostendetur MO posse AC; & constabit etiam, AE, ED

esse $p \in$, & $ED \propto AB$, & $AG \propto GE$. Quum ergo $^{\lambda} AE \in AB$, & $AE \propto^{\mu}$ vtrique ipsarum AG, GE: erunt $^{\lambda} AB$, AG, GE $p \in$, ideoque^u AH, GK media; & proinde etiam quadrata SN, NQ media erunt, & MN, NO mediae^v. Dein ob $AG \propto GE$, erit $AH \propto^{\xi} GK$, id est $SN \propto NQ$, vel $MNq \propto NOq$. Sed quia $AE \propto AG$, & $ED \propto EF$, non tamen $AE \propto ED$: nec erit $AG \propto EF$; & hinc AH non $\propto^{\xi} EL$, vel SN non $\propto PO$, ideoque non erit MN $\propto^{\xi} NO$. Erat autem $MNq \propto NOq$. Quare MN, NO sunt mediae \in . Denique ob $ED \propto AB$, erunt $^{\circ} EF$, AB $p \propto$, ideoque^π EL p , & proinde $MR = MN \times NO$ p erit. Ex quibus omnibus patet MO, id est \sqrt{AC} , esse^ε ex binis mediis primam. Q. E. D.

λ . sch. 14. 10.

μ . 16. 10.

ν . sch. 22. 10.

ξ . 10. 10.

σ . 12. 10.

π . 20. 10.

ϵ . 38. 10.

PROP.

PROP. LVII. THEOR.

Si spatium AC contineatur sub rationali AB Fig. prop.
& ex binis nominibus tertia AD: recta linea LVI.
spatium AC potens irrationalis est, quae appel-
latur ex binis mediis secunda.

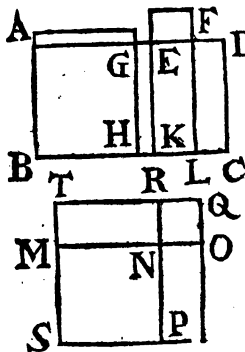
Iisdem constructis, quae in prop. 55. eodem modo, quo antea, patebit, esse $MO = \sqrt{AC}$, & MN, NO medias. Sed quia p ED non est \propto AB, EF autem \propto ED, & $AB = EK$: \therefore hyp. erunt EF, EK p E, ideoque erit $EL = MR$ medium^r. Est autem $MR = MN \times NO$. \therefore sch. 22. 10. Ergo \sqrt{AC} est ex binis mediis secunda^v. \therefore 39. 10. Q. E. D.

PROP. LVIII. THEOR.

Si spatium AC contineatur sub rationali AB Fig. prop.
& ex binis nominibus quarta AD: recta linea LVI.
spatium AC potens irrationalis est, quae voca-
tur maior.

Quoniam AD est ex binis nominibus quarta: ϕ erunt AE, ED p E, & $\sqrt{AEq - EDq}$ ϕ . 4. def. sec. non erit \propto AE, AE vero \propto AB. Biseca ED in F, & fac omnia quae in prop. 55. Constat ergo $MO = \sqrt{AC}$, & \propto GE non \propto AG. Hinc \propto . 19. 10. GK non \propto AH, id est \propto NOq non \propto MNq, ψ . 1. 6. & ideoque $MN \propto NO$. Porro quia p AE \propto AB: erit $AK = AH + GK = \propto$ MNq + NOq rationale^a. Denique quia AE \propto AB, \propto . 20. 10. & ED \propto EF, non autem AE \propto ED: non erit \propto . 14. 10. EF \propto AB vel EK, ergo erunt \propto EF, EK p E, & \propto . sch. 12. 10. ergo $EF \times EK = MN \times NO$ erit medium^s. \therefore 40. 10. Vnde patet \sqrt{AC} esse^t irrationalem maiorem. Q. E. D.

PROP. LIX. THEOR.



Si spatium AC contineatur sub rationali AB & ex binis nominibus quinta AD: recta linea spatium potens irrationalis est, quae vocatur rationale & medium potens.

Constructis iisdem, iterum constat $MO = \sqrt{AC}$, & $MN \propto NO$. Porro, quia ED est minor portio ex binis no-

minibus quintae, est $ED \propto AB$, non autem $AE \propto ED$, sunt tamen AE, ED, AB p. Ergo $AE, AB \propto E$. Ergo $AK = MNq + NOq$ medium¹ erit. Denique, quia EF, AB p, erit $MN \propto NO = EL$ rationale. Quapropter \sqrt{AC} erit irrationalis rationale ac medium² potens. Q. E. D.

2. 5. def. sec.
n. 13. 10. &
sch. 12. 10.
3. constr.
i. 22. 10.
x. 20. 10.
a. 41. 10.

PROP. LX. THEOR.

Fig. prop.
LIX.

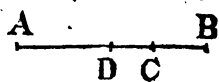
Si spatium AC contineatur sub rationali AB & ex binis nominibus sexta AD: quae spatium AC potest recta linea irrationalis est, quae vocatur bina media potens.

Constructis iisdem, quae supra, pater esse $MO = \sqrt{AC}$, & $MN \propto NO$, & nec AE nec ED $\propto AB$; itaque AE, AB p, & $MNq + NOq = AE \propto AB$ medium³. Et, quia EF $\propto ED$, non autem EK $\propto ED$, erunt EK, EF p, ideoque $MN \propto NO = EK \propto EF$ medium⁴ erit.

u. 6. def. sec.
v. sch. 12. 10.
3. constr.
o. sch. 22. 10.

erit. Porro, quia AE non $\leq EF$, erit $MNq + NOq$ non $\leq MR$. Quare MO irrationalem esse binā media potentem π patet. Q. E. D. r. 42. 10.

L E M M A.

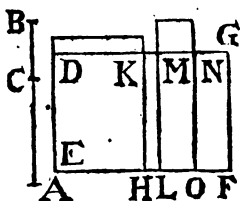


Si recta linea AB in partes inaequales AC, CB secetur: ipsarum partium

quadrata $ACq + CBq$ maiora sunt rectangulo $2 AC \times CB$, quod bis sub dictis partibus continetur.

Bifecetur enim AB in D : & erit $AC \times CB + CDq = ADq$. Hinc $2 AC \times CB < 2 ADq$, &, quia $ACq + CBq = 2 ADq + 2 DCq$, $ACq + CBq > 2 AC \times CB$. Q. E. D. e. 5. 2. r. 9. 2.

PROP. LXI. THEOR.

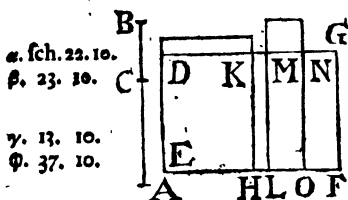


Quadratum eius AB, quae est ex binis nominibus, ad rationalem DE applicatum latitudinem DG facit ex binis nominibus primam.

Sit AC maius, CB minus nomen rectae AB . Fiat Rgl. $DH = ACq$, & Rgl. $KL = BCq$. Hinc erit $MF = 2 AC \times CB$. Bifecetur MG in N , & ad ML ducatur parallela NO . Ergo $MO = NF = AC \times CB$. Sed, quia AC, CB sunt p, e , erunt ACq, CBq p^2, e^2 , ideoque $ACq + CBq \leq$ vtrique ACq, BCq . Quoniam ergo $ACq + CBq$, id est DL , est: erit DM p^2 & $\leq DE$. Dein quia AC , u. 36. 1. p. 37. 10. r. 16. 10. p. sch. 13. 10. u. 21. 10.

S 3

CB



CB $\rho \in$, erit MF medi-
 um^α, & proinde MG^β ρ
 non ξ ML vel DE. Qua-
 re, quum DM ρ & ξ DE,
 erunt DM, MG $\rho \in$ ^γ, &
 DG erit ϕ ex binis no-
 minibus. Insuper, quia

3. lem. 55. 10. $\div \delta$ ACq, AC \times CB, CBq, ideoque \div DH,
 6. 1. 6. MO, KL, erit DK: MN = MN: KM, & er-
 2. 17. 6. go DK \times KM = MNq = $\frac{1}{2}$ MGq. Quia
 vero ACq ξ CBq, & inde DH ξ KL: erit DK
 7. 10. 10. ξ KM. Et quia ACq + CBq ^δ > 2 AC
 9. lem. hui. \times CB, ideoque DL > MF: patet esse DM
 4. 18. 10. > MG. Ergo $\sqrt{(DMq - MGq)} \xi$ DM.
 11. 1. def. sec. Quare DG est ex binis nominibus prima^α.
 Q. E. D.

PROP. LXII, THEOR.

Fig. prop.
 LXI.

*Quadratum eius AB, quae est ex binis me-
 diis prima, ad rationalem DE applicatum la-
 titudinem DG facit ex binis nominibus secun-
 dam.*

Constructis quae in praecedenti propo-
 sitione, erunt AC, CB mediae $\rho \in$ ^λ, & AC \times CB ρ .
 2. 38. 10. Ergo DL medium est, & DM $\rho \in$ DE^μ. Rur-
 4. 23. 10. sus quia MF = 2 AC \times CB est ρ , erit MG ρ
 7. 31. 10. ξ DE. Hinc $\frac{1}{2}$ DM, MG erunt $\rho \in$, & ergo
 3. sch. 14. 10. DG erit^α ex binis nominibus. Et quoniam,
 6. 37. 10. vt in antecedente, ostendetur DM > MG,
 & $\sqrt{(DMq - MGq)} \xi$ DM: erit DG ex bi-
 11. 2. def. sec. nis nominibus^π secunda. Q. E. D.

PROP.

PROP. LXIII. THEOR.

Quadratum eius AB, quae est ex binis me- Fig. prop.
diis secunda, ad rationalem DE applicatum la- LXI.
titudinem DG facit ex binis nominibus tertiam.

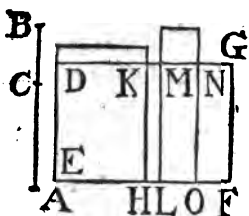
Constructis iisdem, quae ante, ϵ erunt AC, ϵ 39. 10.
 CB mediae ϵ , & erit $DL = ACq + CBq$
 medium, & hinc $DM \rho \epsilon$ DE. Similiter,
 quia $AC \times CB \epsilon$ medium est, erit $MG \rho \epsilon$ DE.
 Sed, quia $AC \epsilon$ CB, erit $DL = ACq + CBq$
 non \leq $MF = 2 AC \times CB$, & ob id. DM
 non \leq MG. Sunt autem DM, MG ρ . Er- ϵ . cor. 27. 10.
 go DG est ex binis nominibus. Ostendetur
 autem ut antea $DM > MG$, & $\sqrt{(DMq -$
 $MGq)} \leq DM$. Ergo erit DG τ ex binis no- τ . 3. def. sec.
 minibus tertia. Q. E. D.

PROP. LXIV. THEOR.

Quadratum maioris AB ad rationalem DE
applicatum latitudinem DG facit ex binis no- Fig. prop.
minibus quartam. LXI.

Construantur eadem. Iam erit $AC \epsilon$ ϵ . 40. 10.
 CB, & $ACq + CBq$ ideoque $DL \rho$, & AC
 $\times CB$ ideoque MF medium. Hinc DM,
 DE sunt $\rho \leq \phi$, sed \approx MG, DE $\rho \epsilon$. Quare ϕ . 21. 10.
 DM, MG sunt $\psi \rho \epsilon$, & DG est τ ex binis no- χ . 23. 10.
 minibus. Sed ut ante ostendetur, esse DM ψ . sch. 14. 10.
 $> MG$, & $DK \times KM = \frac{1}{2} MGq$. Quare α . 37. 10.
 quum ACq non $\leq CBq$, & ergo DK non \leq α . 10. 10 &
 KM, ideoque $\sqrt{(DMq - MGq)} \beta$ non $\leq DM$: β . 19. 10.
 erit DG ex binis nominibus quarta γ . Q. E. D. γ . 4. def. sec.

PROP. LXV. THEOR.



Quadratum eius AB, quae rationale ac medium potest, ad rationalem DE applicatum latitudinem DG facit ex binis nominibus quintam.

Fig. 41. 10.

Nam iisdem constructis constat $DL = AC$ \square CB \square medium esse δ , MF vero $= 2 AC \times CB$ ρ , & hinc DM ρ non $\leq DE$, & $MG \leq DE$, ideoque DM, MG ρ ϵ . Ergo, reliquis ut in praecedente ostensis, patebit, DG esse ex binis nominibus quintam. Q. E. D.

PROP. LXVI. THEOR.

Fig. prop. LXV.

Quadratum eius AB, quae bina media potest, ad rationalem DE applicatum latitudinem DG facit ex binis nominibus sextam.

Fig. 42. 10. 23. 10.

Nam quia DL, MF media ϵ sunt, & ob id DM, MG ρ δ & non \leq ipsi DE ; quia praeterea DL non $\leq MF$, & ob id DM, MG ρ ϵ , & DG ex binis nominibus; reliqua vero ut in prop. 64. ostenduntur: erit DG ex binis nominibus sexta. Q. E. D.

* 6. def. sec.

PROP. LXVII. THEOR.

Ei AB, quae est ex binis nominibus, longitudo commensurabilis CD & ipsa ex binis nominibus est ordine eadem.

Sit

$\overline{A \quad E \quad B}$ Sit enim AE maius nomen
 $\overline{\quad \quad \quad}$ rectae AB. Ergo ρ AE, EB ρ . 9. 37. 10.
 $\overline{\quad \quad \quad}$ sunt ρ €. Fiat ρ AB: CD = ρ . 12. 6.
 $\overline{C \quad \quad F \quad D}$ AE: CF. Ergo EB: FD = ρ . 19. 5.
 $\overline{\quad \quad \quad}$ AB: CD. Hinc λ AE λ CF, μ . sch. 12. 10.
 & EB λ FD, & ergo μ CF, FD ρ . Et quoni-
 am AE: CF = EB: FD, & permutando AE:
 EB = CF: FD, & AE € EB: erit ρ CF € FD. ν . sch. 10. 10.
 Quare CD est ρ ex binis nominibus. Iam ξ si ξ . 15. 10.
 $\sqrt{(AEq - EBq)} \lambda$ AE, erit & $\sqrt{(CFq - FDq)} \lambda$ CF;
 si vero $\sqrt{(AEq - EBq)}$ non λ AE, neque $\sqrt{(CFq - FDq)} \lambda$ CF erit; & si
 AE λ expositae rationali, erit & ρ CF λ eidem; ρ . 13. 10.
 si EB λ expositae ρ , erit & ρ FD λ eidem; si
 neutra AE, EB λ expositae rationali, nec CF,
 FD λ ρ eidem erunt. Ergo CD ex binis no-
 minibus ordine eadem erit ipsi AB ρ . Q. E. D. π . 14. 10.
 ρ . def. sec.

PROP. LXVIII. THEOR.

Ei AB, quae est ex binis mediis, longitudine Fig. prop.
commensurabilis CD & ipsa ex binis mediis est, LXVII.
atque ordine eadem.

Sint AE, EB mediae in AB. Ergo ρ AE €
 EB. Fiat AB: CD = AE: CF. Ergo EB: ρ . 38. & 39.
 FD = AB: CD = AE: CF. Hinc erit EB ρ . 10.
 λ FD, & AE λ CF, ideoque ρ CF, FD mediae ρ . 24. 10.
 erunt. Et, quoniam AE: EB = CF: FD, erunt
 CF, FD ρ mediae €, & ob id CD ex binis me- ν . 1. sch.
 diis erit ρ . Iam, quia AE: EB = CF: FD, ρ . 10. 10.
 erit AEq: AE \times EB = ρ CFq: CF \times FD, & ρ . 1. 6. &
 permutando AEq: CFq = AB \times EB: CF \times ρ . 11. 5.
 FD, ideoque ρ AE \times EB λ CF \times FD. Si ρ . 10. 10.

S 5

igitur

ψ. sch. 12. 10. igitur $AE \times EB \rho$: erit & ψ $CF \times FD \rho$:
 fin $AE \times EB$ medium; erit & $CF \times FD$ me-
 dium^u. Ergo CD est ex binis mediis^σ ordi-
 ne eadem ipsi AB. Q. E. D.

PROP. LXIX. THEOR.

*Maiori AB commensurabilis CD & ipsa ma-
 ior est.*

A E B Factis enim iisdem quae
 ————+———— supra, erit $AE:CF = EB:FD$
 u. 10. 10. ————+———— $= AB:CD$. Ergo^α $AE \leq$
 C F D CF , & $EB \leq FD$. Et quia
 β. 22. 6. permutando $AE:AB = CF:CD$: erit $AEq:$
 γ. 24. 5. $ABq = \beta$ $CFq:CDq$. Similiter $EBq:ABq$
 $= FDq:CDq$. Ergo^γ $AEq + EBq:ABq =$
 $CFq + FDq:CDq$, & permutando $AEq + EBq:$
 $CFq + FDq = ABq:CDq$. Ergo $AEq +$
 $FBq \leq \alpha$ $CFq + FDq$. Est autem $AEq +$
 δ. 40. 10. $EBq \rho \delta$. Ergo^δ $CFq + FDq \rho$ erit. Osten-
 ε. sch. 12. 10. ditur autem ut in praecedente $CF \times FD \leq$
 $AE \times EB$. Medium vero est $AE \times EB \delta$.
 ζ. cor. 24. 10. Ergo & $CF \times FD$ medium^ζ erit. Denique,
 η. 2. sch. quia $AE \propto \delta$ EB , erit & η $CF \propto$ FD . Ergo
 θ. 10. 10. δ CD maior erit. Q. E. D.

PROP. LXX. THEOR.

Fig. prop.
LXIX.

*Rationale ac medium potenti AB commensu-
 rabilis CD & ipsa rationale ac medium potens
 est.*

Constructis iisdem, similiter ostendemus
 $CF \propto FD$, & $CFq + FDq \leq AEq + EBq$,
 ι. 42. 10. & $CF \times FD \leq AE \times EB$. Iam $AEq + EBq$ ^ι
 medium

medium est; ergo & $CFq + FDq$. Et quia $AE \times EB$ ρ : erit $CF \times FD$ ρ λ . Et igitur CD erit rationale ac medium potens.
Q. E. D.

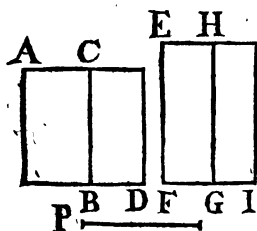
PROP. LXXI. THEOR.

Bina media potenti AB commensurabilis CD Fig. prop. LXIX.
& ipsa bina media potens est.

Nam vt in 69. demonstrabimus, $CF \propto FD$,
& $CFq + FDq \leq AEq + EBq$, & $CF \times FD$
 $\leq AE \times EB$. Iam quia $AEq + EBq$, & AE
 $\times EB$ media μ sunt, & $AEq + EBq$ non \leq μ . 42. 10.
 $AE \times EB$: erunt $CFq + FDq$ & $CF \times FD$
media, & erit $CFq + FDq$ non \leq $\frac{1}{2} CF \times FD$. v. cor. 24. 10.
FD. Ergo CD erit bina media potens μ . $\frac{1}{2}$. 14. 10.
Q. E. D.

PROP. LXXII. THEOR.

Si rationale AB & medium CD componantur: quatuor irrationales fiunt, vel quae ex binis nominibus, vel quae ex binis mediis prima, vel maior, vel rationale ac medium potens.

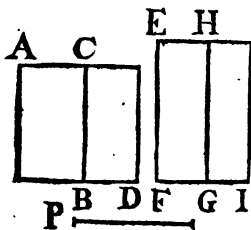


Sit $P = \sqrt{AB + CD}$. Dico P fore
vnam ex quatuor di-
ctis irrationalibus.

Cas. 1. Sit $AB < CD$.
Ad EF ρ applicetur
Rgl. $EFG = AB$, &
Rgl. $HGI = CD$. Er-

go erit EG ρ & FG $\rho \leq EF$. HI vero erit μ . 21. 10.
medium, & GI ρ non $\leq EF$. Est vero EG μ . 23. 10.
non

g. cor. 24. 10.
& hyp.



non \leq HI, & $EG:HI = FG:GI$. Ergo FG non \leq GI, & idcirco FG, GI sunt $\rho \in$, & FI est ex binis nominibus. Et quia $EG > HI$: erit & $FG > GI$.
Iam ponatur $\sqrt{(FGq - GIq)}$

e. 1. def. sec.
r. 55. 10.
v. 4. def. sec.
q. 58. 10.

$\sqrt{(FGq - GIq)} < FG$: & erit FI ex binis nominibus prima^r; & $\sqrt{EI} = \sqrt{AD} = P$ ex binis nominibus^r. Ponatur $\sqrt{(FGq - GIq)}$ non $\leq FG$: & erit FI ex binis nominibus quarta^v; & P maior^q.

x. 56. 10.
y. 59. 10.

Cas. 2. Sit $AB < CD$: & erit $FG < GI$; FI autem vt antea ex binis nominibus. Quare, posita $\sqrt{(GIq - FGq)} < GI$, erit P ex binis mediis x prima. Posita autem $\sqrt{(GIq - FGq)}$ non $\leq GI$, erit P rationale ac medium potens^y. Q. E. D.

PROP. LXXIII. THEOR.

Fig. prop.
LXXII.

Si duo media inter se incommensurabilia AB, CD componantur: duae reliquae irrationales fiunt; vel ex binis mediis secunda, vel binam media potens.

a. 23. 10.
a. hyp.
b. 10. 10.

Factis iisdem quae in praecedente, * erit nec FG nec GI \leq EF, vtraque tamen erit ρ . Et quia EG non \leq HI, ideoque FG non \leq GI: erunt FG, GI $\rho \in$, & hinc FI ex binis nominibus erit, quorum neutrum \leq rationali EF.

Cas. 1.

Cas. 1. Iam si fuerit $AB > CD$, ideoque $FG > GI$, & $\sqrt{(FGq - GIq)} \leq FG$: erit FI ex binis nominibus tertia, & hinc P^y ex binis 7. 57. 10.
mediis secunda. Sin $\sqrt{(FGq - GIq)} \text{ non } \leq FG$: erit P bina media ⁸ potens. 8. 60. 10.

Cas. 2. Si fuerit $AB < CD$: similiter demonstrabitur, P aut ex binis mediis secundam, aut bina media potentem esse. Q. E. D.

Corollarium.

Quae ex binis nominibus, & quae post ipsam sunt (prop. 38. 39. 40. 41. 42.) irrationales, neque mediae neque inter se eadem sunt. Quadratum enim, quod fit a media, ad rationalem applicatum latitudinem efficit rationalem; quod autem fit ab ea, quae est ex binis nominibus, ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus primam; quod ab ea, quae est ex binis mediis prima, ad rationalem applicatum latitudinem efficit ex binis nominibus secundam; & sic deinceps (prop. 63. 64. 65. 66). Quoniam igitur dictae latitudines differunt, & a prima, & inter sese, a prima quidem, quod rationalis sit, inter sese vero, quod ordine non sint eadem: constat & ipsas irrationales inter se differentes esse.

Principium Senariorum per detractionem.

PROP. LXXIV. THEOR.

A Si a rationali AC rationalis AB auferatur,
B potentia solum commensurabilis existens toti AC : reliqua BC irrationalis est.
C Vocetur autem Apotome.

Nam 2 $AC \times AB$ non $\leq ACq + ABq$, s. cor. 27. 10.
& ob id BCq non $\leq ACq + ABq$. Hinc, 2. 7. 2. & cor. 17. 10.
quia

* fch. 27. 10. quia $ACq + ABq$ ρ^2 est, erit BCq α , & ergo BC α . Q. E. D.

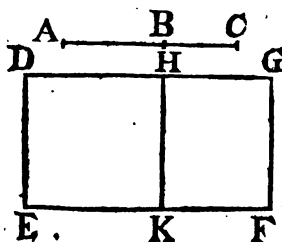
PROP. LXXV. THEOR.

Si a media AC media BC auferatur, potentia solum commensurabilis existens toti AC, quae cum tota AC rationale continet: reliqua AB irrationalis est. Vocetur autem mediae apotome prima.

9. cor. 27. 10. Nam $ACq + BCq$ ρ^2 non $\leq 2 AC \times CB$, & 1. 7. 2 & ergo ABq non $\leq 2 AC \times CB$, ac ob id AB 17. 10. α . Q. E. D. x. 11. def. 10.

PROP. LXXVI. THEOR.

Si a media AC media CB auferatur, potentia solum commensurabilis existens toti AC, quae cum tota AC medium continet: & reliqua AB irrationalis est. Vocetur autem mediae apotome secunda.



Exponatur ρ DE, ad quam applicetur Rgl. $DEK = 2 AC \times BC$, & Rgl. $DEF = ACq + CBq$. Erit itaque $^a HF = ABq$. Et quia $ACq + CBq$ medium ρ^2

1. 7. 2.

11. 16. 10 & cor. 24. 10.

9. 23. 10.

5. cor. 27. 10.

1. 1. 6. &

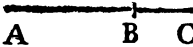
10. 10.

est, nec non $AC \times CB$: erunt DF , DK media, & proinde $^b EF$, EK ρ . Sed quia $AC \in CB$, & ob id $^c ACq + CBq$ non $\leq 2 AC \times CB$: erit $^d FE$ non $\leq EK$. Ergo EF , EK erunt

$\rho \in$

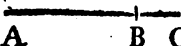
$p \in$, & ergo $KF \propto \alpha$, & ipsum $HF \propto \alpha$, & \propto 74. 10.
 ob id quoque $AB \propto \alpha$ erit. Q. E. D. \propto sch. 21. 10.
 \propto 11. def. 10.

PROP. LXXVII. THEOR.

 Si a recta linea AC recta
 linea CB auferatur, potentia
 incommensurabilis existens toti AC, quae cum
 tota faciat compositum quidem ex ipsarum qua-
 dratis $AC^2 + CB^2$ rationale, quod autem sub
 ipsis continetur $AC \times CB$ medium: reliqua AB
 irrationalis est. Vocetur autem minor.

Nam quia $AC^2 + CB^2$ non \propto 2 $AC \times CB$: \propto sch. 13. 10.
 erit & $AC^2 + CB^2$ non \propto ABq. Quare \propto cor. 17. 10.
 AB \propto erit α . Q. E. D. \propto 11. def. 10.

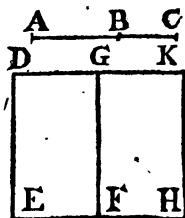
PROP. LXXVIII. THEOR.

 Si a recta linea AC recta
 linea CB auferatur potentia
 incommensurabilis existens toti AC, & cum
 tota faciens compositum quidem ex ipsarum qua-
 dratis $AC^2 + CB^2$ medium, quod autem sub
 ipsis bis continetur 2 AB \times CB rationale: re-
 liqua AB irrationalis est. Vocetur autem cum
 rationali medium totum efficiens.

Nam quia $AC^2 + CB^2$ non \propto 2 $AC \times CB$: \propto sch. 13. 10.
 CB: erit ABq non \propto 2 $AC \times CB$, & hinc \propto 17. 10.
 AB \propto erit α . Q. E. D. \propto 11. def. 10.

PROP.

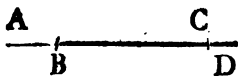
PROP. LXXIX. THEOR.



Si a recta linea AC recta linea CB auferatur potentia incommensurabilis existens toti AC, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis ACq + CBq medium, quod autem sub ipsis bis continetur 2 AC \times CB medium, & adhuc ipsarum quadrata ACq + CBq incommensurabilia ei 2 AC + CB quod bis continetur sub ipsis: reliqua AB irrationalis est. Vocetur autem cum medio medium totum efficiens.

Ad p DE applica Rgl. DEH = ACq + CBq, & Rgl. DEF = 2 AC \times CB. Ergo
 a. 7. 2. β . 23. 10. γ . 10. 10. & GH = α ABq, & EH, EF sunt p β , & DH
 1. 6. non \leq DF. Propterea EH non \leq EF, ideo
 d. 74. 10. que EH, EF p ϵ sunt; ex quo sequitur FH^d
 e. sch. 21. 10. esse $\alpha\lambda$, & GH^e $\alpha\lambda$, & AB^e $\alpha\lambda$. Q. E. D.

PROP. LXXX. THEOR.



Apotomae AB una tantum congruit recta linea BC potentia solum commensurabilis existens toti AC.

* Si negas: congruat alia BD, ita vt^a AD, DB sint p ϵ . Et quia ADq + DBq = 2 AD \times DB + α ABq, ACq + CBq = 2 AC \times CB + ABq: erit ADq + DBq = (ACq + CBq) = 2 AD \times DB + 2 AC \times CB. Sed quia
 a. 74. 10. β . 7. 2. γ . fcc. 27. 10. etiam AC, CB sunt α p ϵ , & hinc^e ADq + DBq = (ACq + CBq) p: erit & 2 AD \times DB

DB — 2 AC \times CB p. Q.E. A^u, quia AD π . 27. 10.
 \times DB & AC \times CB media λ sunt. λ sch. 22. 10.

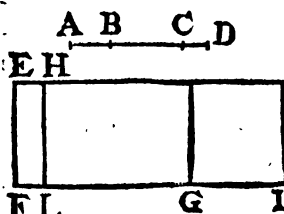
PROP. LXXXI. THEOR.

Mediae apotomae primae AB una tantum congruit recta linea media BC, potentia solum commensurabilis existens toti AC, & cum tota rationale continens. Fig. prop. LXXX.

Si negas: fit AB etiam mediae AD apotome prima. Ergo erunt μ AD, DB mediae ϵ , & AD \times DB p. Erit autem vt antea ADq + DBq — (ACq + CBq) = 2 AD \times DB — 2 AC \times CB. Et quia ADq + DBq medium^u est, nec non ACq + CBq ξ ; rationalia autem sunt 2 AD \times DB & 2 AC \times CB: medium superat medium rationali^u. Q.E. A^u. ν . cor. 24. 10. ξ . 24. 10 & cor. ejusd. σ . hyp. π . sch. 27. 10. ρ . 27. 10.

PROP. LXXXII. THEOR.

Mediae apotomae secundae AB una tantum congruit recta linea media BC, potentia solum commensurabilis existens toti AC, & cum tota medium continens.



Si negas: fit AB etiam apotome secunda mediae AD, id est, sint τ AD, DB mediae ϵ , & medium continentes. Ad p EF applicetur Rgl. EFG = ACq + CBq, & auferatur Rgl. HLG = 2 AC \times CB, vel EL = τ ABq. Ad eandem EF applicetur quoque Rgl. EFI = ADq.

τ. 7. 2.

υ. hyp. &
24. 10.φ. 16. 10. &
cor. 24. 10.

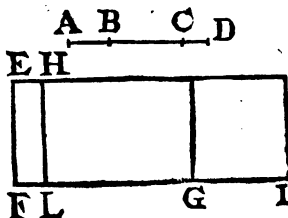
χ. 23. 10.

ψ. cor. 27. 10.

ω. 1. 6. &
10. 10.

α. 74. 10.

β. 80. 10.



$= ADq + DBq$:
& erit $HI = 2 AD$
 $\times DB$. Et quia
 AC, CB mediae \in
sunt: erit $ACq +$
 CBq medium^φ, &
ergo EG medium

erit, & $FG \rho \chi$. Rursus quia $AC \times CB$, &
hinc etiam HG , medium est: erit $LG \rho \chi$. Sed
quia $AC \in CB$: erit ψ $ACq + CBq$ non ≤ 2
 $AC \times CB$, id est, EG non $\leq HG$; & ob id
 FG non $\leq LG$. Quare FG, LG sunt $\rho \in$.
Proinde FL est apotome rectae FG . Simi-
liter autem demonstrabimus, esse & FL apo-
tomen rectae FI . Q. E. A^β.

PROP. LXXXIII. THEOR.

$A \text{---} B \text{---} C \text{---} D$ *Minori AB una tan-
tum congruit recta li-
nea BC, potentia incommensurabilis existens to-
ti AC, & cum tota faciens compositum quidem
ex ipsarum quadratis $ACq + CBq$ rationale,
quod autem bis sub ipsis continetur $2 AC \times CB$
medium.*

γ. 77. 10

δ. 7. 2.

ε. sch. 27. 10.

ζ. 27. 10.

Si negas: congruat BD . Ergo γ $AD \in$
 DB , & $ADq + DBq \rho$, & $2 AD \times DB$ me-
dium erit. Et quia $ADq + DBq = \delta$ $2 AD$
 $\times DB + ABq$, & $ACq + CBq = 2 AC \times$
 $CB + ABq$: erit $ADq + DBq - (ACq +$
 $CBq) = 2 AD \times DB - 2 AC \times CB$. Ergo
medium $2 AD \times DB$ superabit medium $2 AC$
 $\times CB$ rationali^ε. Q. E. A^ζ.

PROP.

PROP. LXXXIV. THEOR.

Ei AB, quae cum rationali medium totum facit, una tantum congruit recta linea BC potentia incommensurabilis existens toti AC, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis $ACq + CBq$ medium, quod autem bis sub ipsis continetur $2 AC \times CB$ rationale. Fig. prop. LXXXIII.

Si negas: congruat quoque BD. Ergo $ADq + DBq$ medium, & $2 AD \times DB$ perit. Et quia ut antea $ADq + DBq = (ACq + CBq) = 2 AD \times DB = 2 AC \times CB$ \therefore medium $ADq + DBq$ superabit medium $ACq + CBq$ rationali. Q. E. A. \therefore 7. 78. 10. 9. sch. 27. 10. 4. 27. 10.

PROP. LXXXV. THEOR.

Ei AB, quae cum medio medium totum facit, una tantum congruit recta linea BC, potentia incommensurabilis existens toti AC, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis $ACq + CBq$ medium, quod autem bis sub ipsis continetur $2 AC \times CB$ medium, & adhuc incommensurabile composito ex quadratis ipsarum. Fig. prop. LXXXII.

Si negas: congruat etiam BD, ita ut $AD \propto DB$, & medium $2 AD \times DB$ non \propto medio $ADq + DBq$. Fiant eadem quae in propositione LXXXII; & simili ratione, ac ibi, demonstrabitur, eandem FL esse apotomen duarum FG, FI. Q. E. A. \therefore 8. 80. 10.

DEFINITIONES TERTIAE.

1. Exposita rationali & apotoma, si quidem tota plus possit, quam congruens, quadrato rectae lineae sibi commensurabilis longitudine; sitque tota expositae rationali longitudine commensurabilis: vocetur *apotome prima*.

2. Si vero congruens sit longitudine commensurabilis expositae rationali; & tota plus possit, quam congruens, quadrato rectae lineae sibi commensurabilis longitudine: vocetur *apotome secunda*.

3. Quod si neutra sit longitudine commensurabilis expositae rationali; & tota plus possit, quam congruens, quadrato rectae lineae sibi commensurabilis longitudine: dicatur *apotome tertia*.

4. Rursus si tota plus possit, quam congruens, quadrato rectae lineae sibi incommensurabilis longitudine: si quidem tota sit longitudine commensurabilis expositae rationali, vocetur *apotome quarta*;

5. Si vero congruens, vocetur *apotome quinta*;

6. Quod si neutra, dicatur *apotome sexta*.

PROP. LXXXVI. PROBL.

Inuenire primam apotomen.

A 16. B 9. Expositae rationali C
 A. cor. 1. C ——— fiat ξ DF. Capiantur λ
 lem. 30. 10. D ——— F duo numeri A, B qua-
 E drati, ita vt A — B non
 G ——— sit quadratus, & fiat μ A :
 A — B
 p. cor. 6. 10.

$A - B = DFq : FEq$. Dico DE esse apotomen primam.

Nam quia $DF \propto C$: erit $DF \rho$. Et quia DFq ad EFq rationem numeri ad numerum, sed non quadrati ad quadratum, habet: erit ^{v. cor. II. 10.} $EF \in DF$; & ergo erunt $EF, DF \rho \in$, & DE apotome [¶] erit. Sit autem $G = \sqrt{(DFq - FEq)}$. ^{¶. 74. 10.} Iam quia $A : A - B = DFq : EFq$, erit conuertendo $A : B = DFq : Gq$, & ob id ^{a. 9. 10.} $G = \sqrt{(DFq - FEq)} \propto DF$. Ergo DE ^{¶. 1. def. tert.} est apotome prima^r. Q. E. F.

PROP. LXXXVII. PROBL.

Inuenire secundam apotomen.

Expositae ρ C sit $\propto EF$, & exponantur numeri A, B quadrati, ita vt $A - B$ non sit quadratus, & fiat $A - B : A = EFq : FDq$. Erit DE apotome secunda. Fig. prop. LXXXVI.

Nam, quia $EF \propto C$, erit $EF \rho$; & vt antea ostendemus, DE apotomen esse, atque $\sqrt{(DFq - FEq)} \propto DF$. Quare patet DE esse apotomen secundam^e. Q. E. F. ¶. 2. def. tert.

PROP. LXXXVIII. PROBL.

Inuenire tertiam apotomen.

A 16. B 12. Exponantur ρ D, & tres numeri A, B, C non habentes inter se rationem quadrati ad quadratum; A vero ad $A - B$ habeat talem rationem. Fiat $C : A = Dq : EGq$, & $A : B = EGq : GFq$. EF erit apotome tertia.



T 3

Nam

- ϵ . 6. 10. A 16. B 12. Nam quia $EGq \propto Dq$:
 C 8. erit $EG \rho$. Hinc, quia GF
 τ . cor. 11. 10. D ————— $\propto EG$, erunt $EG, GF \rho \propto$,
 ν . 74. 10. E ————— G & EF erit ν apotome. De-
 F ————— inde quia ex aequo $C : B$
 H ————— $= Dq : GFq$, non erit GF
 ϕ . 9. 10. $\propto D \phi$. Similiter quia $C : A = Dq : EGq$,
 nec $EG \propto D$. Sit autem $Hq = EGq - GFq$.
 Et quia conuertendo $A : A - B = EGq : Hq$,
 erit H id est $\sqrt{(EGq - GFq)} \propto EG$. Ex
 χ . 4. def. quibus omnibus sequitur EF esse apotomen
 tert. quartam χ . Q. E. F.

PROP. LXXXIX. PROBL.

Inuenire quartam apotomen.

- A 6. B 10. Exponentur duo nu-
 C ————— meri A, B, tales vt A
 D ————— F $+ B$ ad neutrum ratio-
 E ————— nem quadrati ad qua-
 G ————— dratum habeat. Ex-
 posita ρ C fiat $\propto DF$, & $A + B : B = DFq :$
 FEq : erit DE quaesita.

- ψ . 6. def. 10. Quia enim $DF \rho \psi$ est: erit & $FE \rho \nu$; &
 α . 6. 10. & ob id DF, FE erunt $\rho \propto$. Erit ergo $DE \beta$
 sch. 12. 10. apotome. Sit $Gq = DFq - FEq$. Et quia
 α . cor. 11. 10. est conuertendo $A + B : A = DFq : Gq$: erit
 β . 74. 10. G id est $\sqrt{(DFq - FEq)}$ non $\propto DF$. Er-
 γ . 9. 10. go DE erit apotome δ quarta. Q. E. F.
 δ . 4. def. tert.

PROP. XC. PROBL.

Inuenire quintam apotomen.

- Fig. prop. Exponentur duo numeri A, B, ita vt $A + B$
 LXXXIX. ad neutrum habeat rationem quadrati ad qua-
 dratum.

dratum. Expositae ρ C fiat \angle EF, & B: A + B = FEq: FDq. Erit DE quaesita.

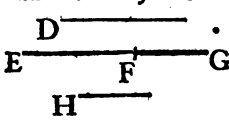
Quia enim, vt in praecedente, patet DE apotomen esse, & $\sqrt{(DFq - FEq)}$ non \angle DF; EF autem \angle ρ C facta est: erit DE apotome quinta¹. Q. E. F.

s. 5. def. tert.

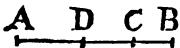
PROP. XCI. PROBL.

Inuenire sextam apotomen.

Exponentur ρ D, & tres numeri A, B, C, tales vt nec inter se rationem numeri quadrati ad quadratum habeant, nec A ad A — B eam habeat rationem; & fiat C: A = Dq: EGq, & vt A: B = EGq: GFq: erit EF quaesita.

A 12. B 5. C 10. Ostenderetur enim, vt

in prop. 88. EF apotomen, & nec EG nec GF ipsi D \angle esse. Sit autem H = $\sqrt{(EGq - GFq)}$. Atqui quum sit A: B = EGq: GFq, & ergo conuertendo A: A — B = EGq: Hq: patet etiam, non \angle esse H id est $\sqrt{(EGq - GFq)}$ \angle EG. Ergo EF erit ^{2. 9. 10.} apotome sexta. ^{4. 6. def. tert.} Q. E. F.

Scholium.

 Sed & expeditius sex dictarum linearum inuentionem ostendere licet. Si enim oporteat inuenire primam apotomen: exponatur ^{3.} ex binis nominibus 3. 49. 10. prima AB, cuius maius nomen sit AC, & fiat CD = CB. Ergo AC, CB hoc est AC, CD sunt ρ E, ^{1. 1. def. sec.} & $\sqrt{(ACq - CDq)}$ \angle AC, & AC expositae rationali \angle est; & igitur ^{2.} AD est apotome prima. Si ^{1. 1. def. tert.} militer

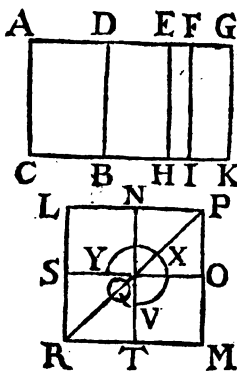
T 4

militer & reliquas apotomas inueniemus, eas quae sunt ex binis nominibus eiusdem ordinis exponentes.

PROP. XCII. THEOR.

Si spatium AB contineatur sub rationali AC & apotoma prima AD: recta linea spatium AB potens apotome est.

λ. 74. 10.
μ. 1. def.
tert.



ν. 18. 10.
ξ. 16. 10.

ο. 12. 10.
π. 6. def. 6.
ρ. 20. 10.

σ. sch. 22. 10.

τ. 26. 6.

υ. 1. cor. 4. 2.
φ. lem. 18. 10.
χ. 17. 6.
ψ. lem. 55. 10.

Sit ipsi AD congruens DG. Ergo λ AG, GD sunt ρ €, & AG ξ μ ρ AC, & $\sqrt{(AGq - GDq)} \xi$ AG. Ad AG applicetur Rgl. $= \frac{1}{4} DGq = DEq$ deficiens figura quadrata. Secet hoc ipsam AH in partes AF, FG. Ergo AF ξ ν FG, & ob id AG ξ $\frac{1}{2}$ tam AF quam FG. Quare tam AF quam FG ξ σ AC erit ρ π , & ergo AI, FK ρ erunt ϵ . Deinde quia $DE = \frac{1}{2} EG$: erunt DE, EG ξ DG. Sed DG ρ non ξ μ AC: ergo DE, EG, AC erunt ρ €, & ergo DH, EK media τ . Fiat quadratum LM $=$ AI, & auferatur quadratum NO $=$ FK, communem cum toto angulum LPM habens. Erunt ergo LM, NO circa eandem τ diametrum RQP. Descripta ergo reliqua figura, erit & ST quadratum ν , iam, quia ϕ AF \times FG $=$ EDq $=$ EGq, erit AF:EG $=$ χ EG:FG, & ob id \div AI, EK, FK. Sed sunt quoque ψ \div LM, MN, NO. Quare MN

MN (= LO) = EK = DH, & proinde DK = gnom. VXY + NO. Sed AK = LM + NO. Ergo AB = ST = LNq. Denique quia AI, FK p sunt: erunt &, quae illa possunt, LP, PN p^a. Sed quia LO = EK medium non \leq NO, & propterea LP non \leq PN: erunt LP, PN p \in , & ergo LN id est \sqrt{AB} apotome erit. Q. E. D.

a. sch. 12. 10.
a. 1. 6. &
10. 10.

PROP. XCIII. THEOR.

Si spatium AB contineatur sub rationali AC & apotoma secunda AD: recta linea spatium AB potens mediae est apotome prima. Fig. prop. XCIII.

Sit enim ipsi AD congruens DG. Ergo β β . 2. def. tert. AG, GD sunt p \in , & DG est \leq AC, & $\sqrt{(AGq - GDq)} \leq$ AG, & AG non \leq AC. Iam factis iisdem, quae in propositione praecedente: erit tam AF quam FG \leq AG, sed non \leq AC, & proinde AF, AC erunt p \in , item FG, AC; & igitur δ AI, FK, & iis aequalia LM, NO media erunt, & LP, PN mediae. Et quia AF: FG = AI: FK = LM: NO, AF vero \leq FG: erunt PL, PN mediae \in . Denique quum ob EG \leq DG \leq p AC, sit EK p; &, vt antea, demonstretur LO = EK: patet, LP, PN rationale continere. Quare LN id est \sqrt{AB} erit mediae apotome prima. Q. E. D.

γ . 14. 10.

δ . sch. 22. 10.

ϵ . 18. 10.
 ζ . 10. 10.

η . 75. 10.

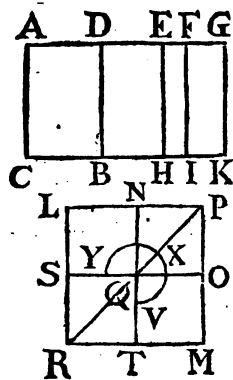
PROP. XCIV. THEOR.

Si spatium AB contineatur sub rationali AC & apotome tertia AD: recta linea spatium potens mediae est apotome secunda.

T,

Nam

9. 3. def.
tert.
1. constr.
x. sch. 22, 10.



1. 76. 10.

Q. E. D.

Nam primo vt in praecedente propositione ostendetur, LP, PN esse medias €. Deinde quia DG p est non ξ^s AC, EG vero ξ^t DG; erunt EG, AC p €, & EK^m medium erit, & igitur quoque LO. Quare quum LP, PN medium contineant: erit LN id est \sqrt{AB} mediae apotome secunda ^λ.

PROP. XCV. THEOR.

Fig. prop.
XCIV.

Si spatium AB contineatur sub rationali AC, & apotoma quarta AD: recta linea spatium AB potens minor est.

11. 4. def.
tert.

v. 20. 10.
ξ. sch. 22. 10.
6. 19. 10.
π. 10. 10.
8. constr.

6. 77. 10.

Sit enim DG congruens ipsi AD: & erunt^m AG, GD p €, eritque AG ξ AC, sed DG non ξ AC, nec $\sqrt{AGq - GDq}$ ξ AG. Construantur eadem quae in praecedentibus: & patet AK^r esse p, DK vero medium ξ , & AF non ξ^o FG, & ergo AI non ξ^m FK. Sed ξ AK = LPq + PNq, & $\frac{1}{2}$ DK = EK = LO = LP \times PN, & AI = LPq, & FK = PNq. Quare LP € PN, & LPq + PNq est p, 2 LP \times PN autem medium; & proinde^r LN id est \sqrt{AB} minor. Q. E. D.

PROP. XCVI. THEOR.

Fig. prop.
XCIV.

Si spatium AB contineatur sub rationali AC & apotoma quinta AD: recta linea spatium AB

AB potens est quae cum rationali medium totum efficit.

Sit enim DG congruens ipsi AD; & erunt
 τ AG, GD ρ E, eritque GD ε AC, sed AG τ . 5. def.
 non ε AC, & $\sqrt{(AGq - GDq)}$ non ε AG. tert.
 Constructis iisdem, quae antea, eodem modo
 ostenderetur, DK vel EK esse ρ , AK vero me-
 dium, & AI non ε FK. Quare erit LP Θ
 PN, & LPq + PNq medium, ε LP \times PN
 vero ρ ; & ob id LN id est \sqrt{AB} quae ν cum μ . 78. 10.
 rationali medium totum efficit. Q. E. D.

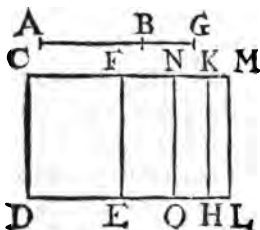
PROP. XCVII. THEOR.

Si spatium AB contineatur sub rationali AC Fig. prop.
& apotoma sexta AD: recta linea spatium AB XCIV.
potens est quae cum medio medium totum efficit.

Sit iterum ipsi AD congruens DG: & erunt
 ν AG, GD ρ E, & $\sqrt{(AG - GDq)}$ non ε ν . 6. def.
 AG, & nec AG nec GD ε AC. Constructis tert.
 iisdem, quae antea, similiter demonstrabimus
 tam LPq + PNq, quam ε LP \times PN esse me-
 dium & LP Θ PN. Sed praeterea, quia AG
 non ε EG, & ergo AK ϕ non ε EK: erit LPq μ . 10. 10.
 + PNq non ε ε LP \times PN. Ergo LN id est
 \sqrt{AB} est ea quae cum medio medium totum
 efficit. Q. E. D. μ . 79. 10.

PROP.

PROP. XCVIII. THEOR.



Quadratum apotomae AB ad rationalem CD applicatum latitudinem CF facit apotomen primam.

ψ. 74. 10.

α. 7. 2.

α. sch. 12. 10.

& 16. 10.

β. 21. 10.

γ. sch. 22. 10.

δ. 23. 10.

ε. cor. 27. 10.

ζ. 10. 10.

η. lem. 55. 10.

θ. 18. 10.

Sit enim BG ipsi AB congruens. Ergo AG, GB sunt ψ p ε. Fiat Rgl. CH = AGq, & Rgl. KL = BGq. Ergo, quia CE = ABq, erit FL = " 2 AG × GB. Bifeca FM in N, & duc NO parallelam ad CD; ac erit FO = NL = AG × GB. Iam quia DM = AGq + GBq est p α, erit CM p β < CD. Et quia FL = 2 AG × GB medium γ est, erit FM p non < CD δ. Porro quia AGq + GBq non < " 2 AG × GB, ideoque CL non < FL: erit FM non < ζ CM, & proinde FM, CM erunt p ε, ac CF apotome ψ erit. Praeterea quum sint ÷÷ CH, NL, KL, ideoque ÷÷ CK, NM, KM: erit CK × KM = NMq = 1/4 FMq. Sed, quia CH < KL, est & CK < KM ζ. Quare √ (CMq — MFq) < CM θ. Ergo CF est apotome prima. Q. E. D.

PROP. XCIX. THEOR.

Fig. prop. XCVIII.

Quadratum mediae apotomae primae AB ad rationalem CD applicatum latitudinem facit CF apotomen secundam.

ι. 75. 10.

Sit iterum BG congruens ipsi AB: & erunt AG, GB mediae ε, & AG × GB p. Ergo factis

factis quae in propof. praec. erunt CH, KL, CL media, fed NL, FL ρ ; ideoque CM erit ρ non \leq CDⁿ, FM autem λ ρ \leq CD. Reliqua ^{n. 23. 10.} autem vt supra ostendentur. Ergo CF est ^{λ . 21. 10.} apotome fecunda. Q. E. D.

PROP. C. THEOR.

Quadratum mediae secundae apotomae AB ad rationalem CD applicatum latitudinem CF Fig. prop. XCVIII.
facit apotomen tertiam.

Factis iisdem, quae antea; quoniamⁿ AG, ^{μ . 76. 10.} GB mediae \in sunt, & AG \times GB medium est, erunt CL & FL media, ideoque erit tam CM, quam FM ρ non \leq CD, & erunt CM, FM $\rho \in$. Ostensis ergo reliquis, quae in praecedentibus, patebit, CF esse apotomen tertiam. Q. E. D.

PROP. CI. THEOR.

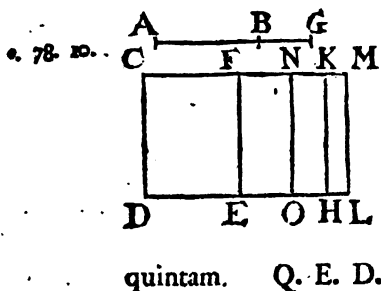
Quadratum minoris AB ad rationalem CD Fig. prop. XCVIII.
applicatum latitudinem CF facit apotomen quar-
tam.

Iisdem constructis: quiaⁿ AG \in GB, & ^{ν . 77. 10.} AGq + GBq ρ , & AG \times GB medium, eodem modo, quo in prop. 98. pater, esse CM \leq CD, & CF apotomen, & CK \times KM = $\frac{1}{4}$ FMq, sed, ob AG \in GB, CK non \leq KM, ideoque $\frac{1}{2} \sqrt{(CMq - MFq)}$ non \leq CM. Er- ^{ξ . 19. 20.} go CF est apotome quarta. Q. E. D.

PROP. CII. THEOR.

Quadratum eius AB, quae cum rationali medium totum efficit, ad rationalem CD applicatum

plicatum latitudinem CF facit apotomen quintam.



Constructis iisdem; quia \circ AG, \circ GB, & AGq + GBq medium, & AG \times GB p, eadem ratione ac antea ostenderetur, esse CM p non \leq CD, sed FM p \leq CD, & CF apotomen

quintam. Q. E. D.

PROP. CIII. THEOR.

Fig. prop. CII.

Quadratum eius AB, quae cum medio medium totum efficit, ad rationalem CD applicatum latitudinem CF facit apotomen sextam.

e. 79. 10.

e. 23. 10.

Constructis enim iisdem; quia \circ AG \circ GB, & AGq + GBq, AG \times GB media, & AG \times GB non \leq AGq + GBq: patet vt antea, CM, FM: esse p non \leq CD, atque, reliquis similiter vt antea ostensis, CF esse apotomen sextam. Q. E. D.

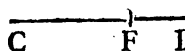
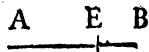
PROP. CIV. THEOR.

Recta linea AE, apotomae CF longitudine commensurabilis, & ipsa apotome est, atque ordine eadem.

e. 74. 10.

e. 12. 5.

e. 10. 10.



Sit enim ipsi CF congruens FD: ergo \circ CD, DF p \circ . Fiat EB: FD = AE: CF. Erit ergo \circ AB: CD = EB: FD = AE: CF; & proinde AB \leq CD, & EB

EB \propto FD. Quare AB, BE erunt ρ^{ϕ} , &, quia ϕ . sch. 12. 10.
 CD \in DF, erunt AB, BE $\rho \in \propto$, ideoque AE \propto . 1. sch.
 apotome erit σ . Secundo quia AB : CD = 10. 10.
 EB : FD, & permutando AB : EB = CD : FD;
 si $\sqrt{(CDq - DFq)} \propto$ vel non \propto CD, erit ψ . 15. 10.
 & $\sqrt{(ABq - BEq)} \propto$ vel non \propto AB. Et si
 CD \propto vel non \propto expositae rationali, erit ω & AB ω . 12. 14. 10.
 \propto vel non \propto eidem; nec non, si DF \propto vel non
 \propto ρ expositae, erit ω BE \propto vel non \propto eidem.
 Ergo cuius ordinis apotome est CF, eiusdem
 est ω quoque apotome AE. Q. E. D. ω . def. tert.

PROP. CV. THEOR.

Recta linea AE, mediae apotomae CF com- Fig. prop.
mensurabilis, & ipsa mediae apotome est, atque CIV.
ordine eadem.

Factis iisdem quae in praecedente, quia β CD, β . 75. 76. 10.
 DF sunt mediae \in , similiter demonstrabitur,
 AB \propto CD, & AB, BE esse medias $\in \gamma$. Ergo γ . 24. 10. &
 AE est mediae β apotome. Deinde quia CDq : 1. sch. 10. 10.
 CD \times DF = δ CD : DF = AB : BE = δ ABq : 2. 1. 6.
 AB \times BE, & ergo permutando CDq : ABq
 = CD \times DF : AB \times BE : erit ϵ CD \times DF \propto ϵ . 10. 10.
 AB \times BE. Quare si CD \times DF est ρ vel me-
 dium, erit ζ & AB \times BE ρ vel medium. Hinc ζ . sch. 12. 10.
 patet β esse AE mediae apotomen eiusdem or- Cor. 24. 10.
 dinis, cuius est CF. Q. E. D.

PROP. CVI. THEOR.

Recta linea AE, minori CF communisurabi-
lis, & ipsa minor est.

Fiant

77. 10. $\overline{A \quad E \quad B}$ Fiant eadem, quae prius: &
 9. 2. sch. $\overline{C \quad F \quad D}$ quia $CD, DF \propto$, erunt &
 10. 10. $AB, BE \propto$. Et quoniam $CD:$
 22. 6. $DF = AB:BE$, ideoque $CDq:$
 $DFq = ABq:BEq$, & componendo ac permu-
 tando $CDq + DFq:ABq + BEq = DFq:BEq$;
 DF autem $\leq BE$: erit $CDq + DFq \leq ABq +$
 BEq . Quare, quum $CDq + DFq$ sit p^1 ,
 12. 10. erit & $ABq + BEq p^2$. Denique quia vt in
 præc. patet esse $CD \times DF \leq AB \times BE$, &
 $CD \times DF$ medium¹ est: est & $AB \times BE$ me-
 24. 10. dium². Ergo AE minor¹ est. Q. E. D.

Aliter.

Sit minori $A \leq B$. Di-
 B minorem esse.
 Ad expositam rationa-
 lem CD applicetur Rgl. C
 101. 10. $E = Aq$. Erit itaque¹
 CF apotome quarta. Fiat
 Rgl. $FH = Bq$. Igitur, quia $A \leq B$, erit CE
 9. 10. $\leq FH$, & $CF \leq FG$. Hinc FG erit¹ apo-
 104. 10. tome quarta, & $\sqrt{FH} = B$ erit¹ minor. Q.
 95. 10. E. D.

PROP. CVII. THEOR.

$\overline{A \quad E \quad B}$
 $\overline{C \quad F \quad D}$
*Recta linea AE commen-
 surabilis ei CF, quae cum ra-
 tionali medium totum efficit,
 & ipsa cum rationali medium
 totum efficiens est.*

Constructis iisdem quae antea, similiter de-
 monstrabitur $AB:BE = CD:DF$, & $ABq +$
 BEq

BEq \leq CDq + DFq, & AB \times BE \leq CD \times DF. Iam^e CDq + DFq est medium, & CD \times DF ρ , & CD \in DF. Ergo AB \in BE, & ABq + BEq est^r medium, & AB \times BE ρ ^{r. sch. 24. 10.} ideoque AE est cum rationali medium totum efficiens^s. Q. E. D. ^{v. sch. 12. 16.}

Aliter.

Factis iisdem, quae in demonstratione altera praecedentis, erit CF apotome^p quinta, ^{p. 102. 10.} ideoque^x & FG. Hinc, ob FE ρ , erit \sqrt{FH} ^{x. 104. 10.} = B cum rationali medium totum efficiens^y. ^{y. 96. 10.} Q. E. D.

PROP. CVIII. THEOR.

Recta linea AE, commensurabilis ei CF, quae cum media medium totum efficit, & ipsa cum medio medium totum efficiens est. Fig. prop. CVII.

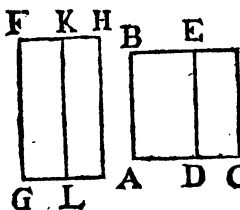
Constructis iisdem quae supra, erit iterum AB : EB = CD : DF, & ABq + BEq \leq CDq + DFq, & AB \times BE \leq CD \times DF. Iam^e CDq + DFq medium, & CD \times DF medium, & CD \times DF non \leq CDq + DFq. Ergo AB \in BE^a, & tam ABq + BEq quam AB \times BE medium^b, & ABq + BEq non \leq AB \times BE, ideoque AE est^c cum medio medium totum efficiens. ^{a. 2. sch. 10. 10. b. sch. 24. 10. c. 14. 10.} Q. E. D.

PROP. CIX. THEOR.

Medio BD de rationali BC detracto, recta linea, quae reliquum spatium EC potest, una ex duabus irrationalibus sit, vel apotome, vel minor.

V

Ex-



d. 21. 10.

e. 23. 10.

f. 74. 10.

g. 92. 10.

h. 95. 10.

Exposita enim p FG, fiat Rgl. $GH = BC$, & Rgl. $GK = BD$. Ergo $LH = EC$, & GH p , & GK medium. Quare δ erit FH p \leq FG, & FK p non \leq FG, ideoque FH, FK p \in , ac ob id KH apotome ζ , & ipsi congruens FK . Iam si sit $\sqrt{(FHq - FKq)} \leq FH$, erit KH apotome prima, & $\sqrt{HL} = \sqrt{EC}$ apotome. Si non sit $\sqrt{(FHq - FKq)} \leq FH$, erit KH apotome quarta, ideoque \sqrt{EC} minor. Q. E. D.

PROP. CX. THEOR.

Fig. prop. praec.

Rationali BD de medio BC detracto, aliae duae irrationales sunt, vel mediae apotome prima, vel cum rationali medium totum efficiens.

Constructis iisdem, quae prius, erit FH p non \leq FG, & FK p \leq FG. Erunt ergo iterum FH, FK p \in , & KH apotome erit, ipsique congruens FK . Iam si fuerit $\sqrt{(FHq - FKq)} \leq FH$: erit KH apotome secunda, & \sqrt{LH} id est \sqrt{EC} mediae apotome prima. Si fuerit $\sqrt{(FHq - FKq)} \leq FH$: erit KH apotome quinta, & ergo \sqrt{EC} erit * cum rationali medium totum efficiens. Q. E. D.

i. 93. 10.

ii. 96. 10.

PROP. CXI. THEOR.

Fig. prop. CIX.

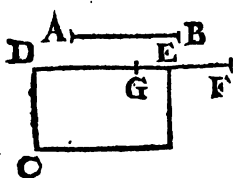
Medio BD de medio BC detracto, quod sit incommensurabile toti, reliquae duae irrationales sunt, vel mediae apotome secunda, vel cum medio medium totum efficiens.

Quia

Quia enim GH non \leq FL, erit FH non \leq FK. Quare FH, FK erunt $\rho \in$, & ergo erit FH apotome, & ipsi congruens KF. Nunc si $\sqrt{(FHq - FKq)} \leq FH$: quia FH, FK non \leq FG, erit KH apotome tertia, & hinc \sqrt{LH} λ . 23. 10. id est \sqrt{EC} mediae^a apotome secunda. Si $\sqrt{(FHq - FKq)}$ non \leq FH: erit KH apotome sexta, ideoque \sqrt{EC} cum medio medium totum efficiens^b. Q. E. D. v. 97. 10.

PROP. CXII. THEOR.

Apotome AB non est eadem quae ex binis nominibus.



Si negas: exponatur ρ CD, & fiat Rgl. CE = A Bq. Ergo DE erit $\frac{1}{2}$ apotome prima. Sit ipsi congruens EF. Ergo DF, FE $\rho \in$, & DF \leq CD. Sed §. 98. 10.

quia AB etiam ponitur ex binis nominibus: π . 61. 10. erit DE ex binis nominibus^a prima. Sit eius $\frac{1}{2}$ def. sec. maius nomen DG. Ergo $\frac{1}{2}$ DG, GE $\rho \in$, & DG $\frac{1}{2}$. 12. 10. \leq CD. Hinc erit $\frac{1}{2}$ DF \leq DG, & ergo $\frac{1}{2}$ FG $\frac{1}{2}$ sch. 12. 10. \leq DF, & FG ρ . Verum quia DF non \leq FE, erit FG non $\frac{1}{2}$ \leq FE, & hinc erunt FG, FE $\rho \in$, ϕ . 14. 10. ac GE apotome^b erit. Sed est quoque GE ρ . χ . 74. 10. Q. E. A.

Corollarium.

Apotomae, & quae ipsam consequuntur, (prop. 75. 76. 77. 78. 79) irrationales, neque mediae neque inter se eadem sunt. Quadratum enim, quod a media fit, ad rationalem applicatum, latitudinem facit rationalem. Quod autem ab apotoma fit, ad

V 2

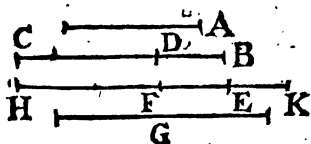
ratio-

rationalem applicatum, latitudinem facit apotomen primam; quod fit a mediae apotome prima, apotomen secundam; & sic deinceps (prop. 100. 101. 102. 103.). Quoniam igitur dictae latitudines differunt tum a prima tum inter sese; a prima quidem, quod illa rationalis sit, inter se vero, quod ordine non sint eadem: manifestum est, & ipsas hasce irrationales inter se differentes esse.

Et quoniam ostensum est, apotomen non esse eandem, quae ex binis nominibus; & quadrata quidem apotomae & earum, quae sequuntur apotomen, ad rationalem applicata, latitudines facere apotomas; quadrata vero eius, quae ex binis nominibus est, & hanc sequentium, ad rationalem applicata facere latitudines, quae ex binis nominibus (prop. 61. 62. - - 66.): ergo rectae lineae quae sequuntur apotomen, & quae sequuntur eam quae ex binis nominibus est, inter se diversae erunt, ita ut omnes irrationales sint numero tredecim.

1. Media.
2. Quae ex binis nominibus.
3. Quae ex binis mediis prima.
4. Quae ex binis mediis secunda.
5. Maior.
6. Rationale ac medium potens.
7. Bina media potens.
8. Apotome.
9. Mediae apotome prima.
10. Mediae apotome secunda.
11. Minor.
12. Cum rationali medium totum efficiens.
13. Cum medio medium totum efficiens.

PROP. CXIII. THEOR.



Quadratum rationalis A, ad eam quae ex binis nominibus BC applicatum, latitudinem

EF facit apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus CD, DB eius, quae est ex binis nominibus, & in eadem ratione; & adhuc apotome EF, quae fit, eundem habet ordinem,

ordinem, quem ea BC quae est ex binis nominibus.

Sit enim etiam $BD \times G = Aq$. Ergo ψ ψ . 16. 6.
 $BC: DB = G: EF$, ideoque $G > EF$. Fiat
 $EH = G$. Quare $CB: BD = HE: EF$, & di-
uidendo $CD: DB = HF: FE$. Fiat $HF: FE$
 $= FK: KE$. Est ergo $HK: KF = FK: KE$ α . 12. 5.
 $= HF: FE = CD: DB$. Iam quia $CDq \leq \alpha$ α . 32. 10.
 DBq , est & $HKq \leq KFq$. Et quoniam β HKq : β . 2. cor. 20. 6.
 $KFq = HK: KE$, erit $HK \leq KE$, ideoque &
 γ $HE \leq EK$. Et quia $BD \times HE = Aq$ est γ . 16. 16.
 ρ , nec non $BD \rho^{\alpha}$: erit & $HE \rho^{\delta} \leq BD$, & δ . 21. 10.
ob id & $EK \rho \leq BD$ ac $FK \leq CD^{\epsilon}$. Deinde ζ ϵ . 10. 10.
quia $CD^{\alpha} \in DB$, erit & ζ $FK \in KE$, & ergo ζ . 1. sch. 10. 10.
 FK, KE erunt $\rho \in$, & η FE erit apotome. Sed η . 74. 10.
 CD maius est nomen ipsius CB . Iam si $\sqrt{(CDq$
 $- DBq)} \leq$ vel non $\leq CD$, erit & $\sqrt{(FKq -$
 $KEq)} \leq$ vel non $\leq FK^{\theta}$; & si CD fuerit \leq vel θ . 9. 15. 10.
non $\leq \rho$ expositae, erit & $FK \leq$ 'vel non \leq ι . 12. 14. 10.
eidem; atque si $DB \leq$ vel non \leq eidem ρ , erit
& $EK \leq$ vel non \leq eidem. Ergo FE apoto-
me erit, cuius nomina FK, KE commensura-
bilia sunt nominibus CD, DB eius &c. Q.
E. D.

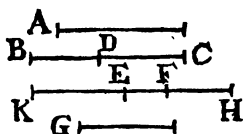
PROP. CXIV. THEOR.

Quadratum rationalis A, ad apotomen BD applicatum, latitudinem KH facit eam, quae ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt apotomae BD nominibus BC, CD & in eadem ratione; & adhuc quae ex binis nominibus fit KH eundem habet ordinem, quem ipsa BD apotome.

V 3

Nam

κ. 74. 10.



Nam quia DC
congruens est ipsi
BD, erunt \simeq BC,
CD ρ E. Fiat BC
 \times G = Aq: &

α. 27. 10.

μ. 16. 6.

ν. 14. 5.

ξ. 10. 6.

ο. 19. 5.

π. 1. sch.

10. 10.

ρ. 2. cor.

20. 6.

σ. 10. 10.

τ. cor. 16. 10.

υ. 12. 10. &

sch. eiusd.

φ. sch. 12. 10.

& 10. 10.

χ. 37. 10.

ψ. 15. 10.

ω. def. sec.

& tert.

erit BC \times G ρ , ac ideo G ρ λ BC, ac prae-
terea CB: BD \simeq KH: G, ideoque KH $>$
G. Ponatur KE = G: ergo KE ρ λ BC, &
CB: BD = HK: KE, & conuertendo igitur
BC: CD = KH: HE. Fiat KH: HE =
HF: FE. Igitur KF: FH = \circ KH: HE =
HF: FE = BC: CD. Hinc KF \in \circ FH, &
KFq: FHq = \circ KF: FE, & ergo KF λ \circ FE,
hinc & KE λ \circ KF, & KF ρ λ BC ν , & proinde
etiam FH ρ λ CD ϕ . Quum ergo sint KF,
FH ρ \in : erit KH \simeq ex binis nominibus, quae
erunt λ ipsius BD nominibus BC, CD, & in
eadem ratione. Denique patet, si $\sqrt{(BCq -$
CDq)} λ vel non λ BC, esse & $\sqrt{(KFq -$
FHq)} λ vel non λ KF, & si BC, CD fuerint λ
vel non λ expositae ρ , fore & KF, FH λ vel
non λ eidem ρ ; & ergo \circ KH esse ex binis
nominibus eiusdem ordinis, cuius est apotome
BD. Q. E. D.

PROP. CXV. THEOR.

*Si spatium contineatur sub apotoma AB &
ea CD quae ex binis nominibus, cuius nomina
CE, ED commensurabilia sunt nominibus AF,
FB apotomae AB, & in eadem ratione: recta
linea G spatium potens est rationalis.*

Expo-

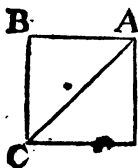
$\begin{array}{c} \text{A} \quad \text{B} \quad \text{F} \\ \text{K} \quad \text{C} \quad \text{E} \quad \text{D} \\ \text{L} \quad \text{M} \\ \text{G} \quad \text{H} \end{array}$
 Exponatur ρ H,
 & fiat $CD \times KL =$
 Hq. Apotome er-
 go est α KL, cuius no-
 mina KM, ML \leq CE,
 ED & in eadem ratione. Est ergo α AF: FB
 $= \beta$ KM: ML, & permutando AF: KM $= \beta$. 11. 5.
 FB: ML, & ergo γ AB: KL $=$ AF: KM. Et γ . 19. 5.
 quia δ CE, ED \leq ipsis AF, FB, ideoque & AF δ hyp.
 $\leq \alpha$ KM: erit AB $\leq \zeta$ KL. Hinc quia AB: ζ . 12. 10.
 KL $=$ AB \times CD: KL \times CD $=$ Gq: Hq:
 erit ζ Gq \leq Hq, & ob id α G ρ . Q. E. D. γ . sch. 12. 10.

PROP. CXVI THEOR.

A media A infinitae irrationales sunt; & nulla alicui antecedentium est eadem.

$\begin{array}{c} \text{A} \text{—————} \\ \text{B} \text{—————} \\ \text{C} \text{—————} \\ \text{D} \text{—————} \end{array}$
 Exponatur ρ B, & fit Cq
 $= A \times B$. Erit ergo ρ . 3. sch. 21. 10.
 Cq α A, & ipsa C α A, neque
 ulli haecenus commemora-
 tarum eadem. Nullius enim antecedentium
 quadratum ad ρ applicatum latitudinem facit
 mediam. Rursus fit Dq $= B \times C$: & erit
 iterum ρ D α A, nulli tamen antecedentium
 eadem; quia nullius earundem quadratum ad
 ρ applicatum talem α facit latitudinem, qua-
 lis est C. Similiter & eodem ordine in infi-
 nitum protracto, manifestum est, a media in-
 finitas irrationales fieri, nulli antecedentium
 easdem. Q. E. D. α . per dem.

PROP. CXVII. THEOR.



Propositum sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum AC lateri AB incommensurabilem esse longitudine.

Si negas: sit $AC \leq AB$. Ergo habebit AC ad AB rationem numeri * ad numerum. Habeat quam EF ad G; & sint EF, G

minimi in data ratione. Non ergo vnitas erit

EF: quia, quum $AC > AB$, foret vnitas * maior quam numerus, si EF vnitas esset. Quare EF numerus sit necesse est. Et quia ACq:

ABq' = $EF^2 : G^2$, & ACq = $\frac{1}{2}$ ABq: erit

$EF^2 = 2 G^2$, & ergo EF^2 est * par, & EF par *.

Iam quia EF, G minimi sunt in data ratione, &

ergo inter se primi; EF autem par est: nequit

G par esse; si enim ita, vtrumque EF, G idem

numerus 2 metiretur. Ergo G erit impar. Verum

ipsius EF paris dimidium sit EH: & erit

$EF^2 = 4 EH^2 = 2 G^2$, ideoque $G^2 = 2$

EH^2 , & G par. Erat autem idem G & impar.

Q. E. A.

Aliter.

Si dicas $AC \leq AB$: sint rursus EF, G numeri

minimi in ratione AC:AB; & erunt ergo EF, G

primi inter se *. Iam nequit G esse vnitas. Nam

quia ACq: ABq = $EF^2 : G^2$; & ACq = $\frac{1}{2}$ ABq:

si G esset vnitas, foret $EF^2 = 2$, quod fieri nequit.

Sed quia G est numerus, & $EF^2 = 2 G^2$:

G numerus * metietur numerum EF, & ideo EF

ac G non erunt primi inter se. Erant autem &

primi inter se. Q. E. A.

EVCLI-

E V C L I D I S

E L E M E N T O R V M

L I B E R X I

* * * * *

DEFINITIONES.

1. *Solidum* est, quod longitudinem & latitudinem & crassitudinem habet.

2. *Solidi* autem *terminus* est superficies.

3. *Recta linea ad planum recta* est, quando ad rectas omnes lineas, quae ipsam contingunt & in subiecto plano iacent, rectos angulos efficiat.

4. *Planum ad planum rectum* est, quando rectae lineae, quae communi planorum sectioni ad rectos angulos & in vno plano ducuntur, alteri plano ad angulos rectos fuerint.

5. *Rectae lineae ad planum inclinatio* est, quando a sublimi termino rectae illius lineae ad planum acta perpendiculari, a puncto facto ad terminum lineae, qui est in plano, recta linea iuncta fuerit, angulus nempe acutus, qui iuncta linea & insistente continetur.

6. *Plani ad planum inclinatio* est angulus acutus rectis lineis contentus, quae ad rectos angulos communi planorum sectioni ad vnum ipsius punctum in utroque planorum ducuntur.

7. *Planum ad planum similiter inclinari* dicitur atque alterum ad alterum, quando dicti incli-

inclinationum anguli inter se fuerint aequales.

8. *Plana parallela* sunt, quae inter se non conueniunt.

9. *Similes figurae solidae* sunt, quae similibus planis ac multitudine aequalibus continentur.

10. *Aequales vero & similes figurae solidae* sunt, quae similibus planis, multitudine simul & magnitudine aequalibus, continentur.

11. *Solidus angulus* est plurium, quam duarum, linearum, quae sese contingant, & non in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio. *Aliter.* Solidus angulus est, qui pluribus, quam duobus, planis angulis, in eodem non iacentibus plano, atque ad vnum punctum constitutis, comprehenditur.

12. *Pyramis* est figura solida planis comprehensa, quae ab vno plano ad vnum punctum constituitur.

13. *Prisma* est figura solida planis comprehensa, quorum aduersa duo aequalia & similia parallela sunt, reliqua vero parallelogramma.

14. *Sphaera* est figura quidem comprehensa, quum circa manentem diametrum semicirculus conuertitur, donec in eundem locum, a quo moueri coeperat, rursus restitatur.

15. *Axis vero sphaerae* est manens illa recta linea, circa quam semicirculus conuertitur.

16. *Con-*

16. *Centrum* autem *sphaerae* est idem illud, quod & semicirculi.

17. *Diameter* vero *sphaerae* est recta linea quaedam per centrum ducta, & ex vtraque parte a *sphaerae* superficie terminata.

18. *Conus* est figura quidem comprehensa, quum rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quae circa rectum angulum sunt, triangulum ipsum conuertitur, donec in eundem locum, a quo moueri coeperat, rursus restituatur. Verum si manens recta linea aequalis fuerit reliquo lateri, quod circa rectum angulum conuertitur, *conus orthogonius* erit: si vero minor, *amblygonius*: & si maior, *oxygonius*.

19. *Axis* autem *coni* est manens illa recta linea, circa quam triangulum conuertitur.

20. *Basis* vero circulus a conuersa recta linea descriptus.

21. *Cylindrus* est figura comprehensa, quando rectanguli parallelogrammi manente vno latere eorum, quae circa rectum angulum sunt, parallelogrammum ipsum conuertitur, donec in eundem locum, a quo moueri coeperat, rursus restituatur.

22. *Axis* vero *cylindri* est manens illa recta linea, circa quam parallelogrammum conuertitur.

23. *Bases* autem sunt circuli, qui a duobus ex aduerso circumactis lateribus describuntur.

24. Si

24. *Similes coni & cylindri sunt, quorum & axes & basium diametri proportionales sunt.*

25. *Cubus est figura solida sex quadratis aequalibus contenta.*

26. *Tetraedrum est figura solida quatuor triangulis aequalibus & aequilateris comprehensa.*

27. *Octaedrum est figura solida octo triangulis aequalibus & aequilateris comprehensa.*

28. *Dodecaedrum est figura solida, quae duodecim pentagonis aequalibus & aequilateris & aequiangulis continetur.*

29. *Icosaedrum est figura solida, quae viginti triangulis aequalibus & aequilateris comprehenditur.*

* 30. *Parallelepipedum est figura solida sex planis, quorum quae ex aduerso parallela sunt, contenta.*

* 31. *Solida figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figurae inscriptae constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figurae, cui inscribitur.*

* 32. *Solida figura solidas figurae vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera vel denique plana figurae circumscriptae tangunt omnes angulos figurae, circum quam describitur.*

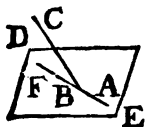
* AXIOMA.

Anguli solidi, qui sub aequae multis aequalibus ac eodem ordine positis angulis planis continentur, aequales sunt.

PROP.

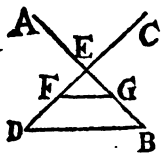
PROP. I. THEOR.

Rectae lineae ABC pars quaedam non est in subiecto plano DE, quaedam vero in sublimi.



Si enim fieri potest, sit pars AB in plano DE, pars BC autem extra. Iam, quia omnis recta in dato plano in directum continuari potest^a, sit BF in directum^{a. 2. post. 1.} ipsi AB, in plano DE. Ergo rectae ABF, ABC segmentum commune BA habebunt. Q. E. A^β. p. 12. ax. 1.

PROP. II. THEOR.



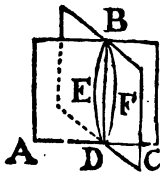
Si duae rectae lineae AB, CD se inuicem secant, in uno sunt plano. Item, omne triangulum DEB in uno plano consistit.

1. Si $\triangle DEB$ non sit in uno plano: erit pars eius, velut EFG, in alio plano, quam reliqua; ideoque rectarum ED, EB vniuscuiusvis pars erit in plano subiecto, pars in sublimi. Q. E. A^γ.

γ. 1. II.

2. Ergo quum ED, EB sint in eodem plano, CD autem sit γ in plano, in quo est ED, & AB in plano γ illo, in quo est EB: necesse est, ut AB, CD sint in eodem plano. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.



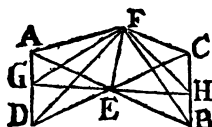
Si duo plana AB, BC se inuicem secant: communis ipsorum sectio DB est linea recta.

Si enim linea DB, in qua plana se inuicem secant, non sit recta: ducatur a puncto B ad D

in

2. 1. post. 1. in plano AB alia recta^s BED, in plano autem BC recta BFD; & recta BFD cum recta BED
 6. 12. 22. 1. spatium comprehendet. Q.E.A^s.

PROP. IV. THEOR.



Si recta linea EF duabus rectis lineis AB, CD, se invicem secantibus, in communi sectione E ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas AB, CD plano ad rectos angulos erit.

2. 4. 1.
 26. 1.

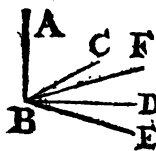
2. 2. 1.

3. 3. def. 11.

Sumatur $AE = EB = CE = ED$, & iungantur AD, CB, & per E ducatur in plano ACBD vtcunque recta GEH, & a quovis puncto F in sublimi ducantur rectae FA, FG, FD, FB, FH, FC. Iam quia in Δ is AED, CEB est^s $AD = CB$, & ang. EAD = EBC: erit^s in Δ is AEG, HEB latus AG = HB, & GE = EH. Praeterea quum in Δ is AEF, BEF sit^s $FA = FB$, & in Δ is FED, FEC pari ratione^s $FD = FC$: erit in Δ is AFD, BFC ang. FAD =^s FBC. Hinc ob AG = HB, & FA = FB, erit^s FG = FH; & ob id in Δ is GEF, HFE erunt^s anguli ad E aequales, id est recti. Similiter ostenditur EF ad omnes alias rectas in plano ACBD per E ductas angulos rectos efficere. Ergo^s FE plano per AB, CD ad rectos angulos est. Q.E.D.

PROP.

PROP. V. THEOR.

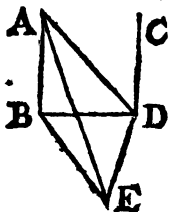


Si recta linea AB tribus rectis lineis, BC, BD, BE, sese tangentibus, in communi sectione B ad rectos angulos insistat: tres illae rectae lineae BC, BD,

BE in uno plano erunt.

Si fieri potest, sint BD, BE quidem in subiecto plano, BC vero in sublimi. Planum per AB, BC producat, donec subiectum secet in \ast recta BF. Iam quia AB ipsis BD, BE ad rectos insistit, erit eadem ad planum subiectum recta^a, ideoque ipsi BF, quae etiam in plano subiecto est, ad rectum \ast angulum insistet. Sed ponitur quoque ang. ABC rectus. Ergo ang. ABF = ABC. Sed hi anguli sunt in eodem plano per AB, BC. Ergo totus ABF aequalis est parti ABC. Q. E. A.

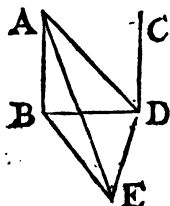
PROP. VI. THEOR.



Si duae rectae lineae AB, CD eidem plano ad rectos angulos fuerint, parallelae erunt ipsae rectae lineae AB, CD.

Insistant AB, CD subiecto plano in punctis B, D. Iunctae BD datur in eodem plano perpendicularis DE, quae fiat = AB, & iungantur BE, AE, AD. Et quia AB est ad planum subiectum recta: erunt ang. ABD, ABE recti. Similiter ang. CDB, CDE recti erunt. Quum itaque ang. ABD = BDE, & AB = DE,

e. 4. I.
π. 8. I.



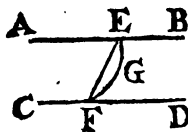
g. 5. II.
g. 2. II.

v. 28. I.

DE, & BD communis : erit
AD = BE. Ergo in Δ is
BAE, DAE erit ang. ABE $\hat{=}$ π
EDA; ideoque EDA rectus
erit. Sunt autem & ang. EDC,
EDB recti. Ergo rectae CD,
DA, DB erunt in vno plano.

Sed AB est in eodem plano, in quò sunt DA,
DB. Ergo AB, CD sunt in eodem plano.
Quare, quum ang. ABD, CDB recti sint, ipsae
AB, CD parallelae sunt. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.



*Si duae rectae lineae AB,
CD parallelae sint; suman-
tur autem in utraque ipsa-
rum quaelibet puncta E, F:
quae dicta puncta coniungit
recta linea in eodem cum parallelis plano erit.*

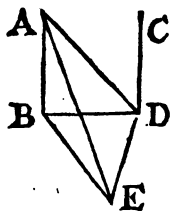
v. 3. II.

Si fieri potest, sit recta EGF in sublimi.
Ducatur per eam planum utcumque, quod
secabit planum subiectum in recta EF. Er-
go duae rectae EF, EGF spatium comprehen-
dent. Q. E. A.

PROP. VIII. THEOR.

*Si fuerint duae rectae lineae AC, CD par-
allelae, atque altera earum AB plano aliovi sit
ad rectos angulos: & reliqua CD quoque ei-
dem plano ad rectos angulos erit.*

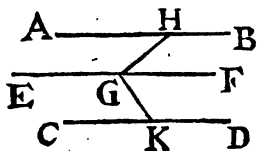
Insistant AB, CD plano subiecto in punctis
B, D. Iungatur BD. Ergo AB, BD, DC
erunt



erunt ϕ in vno plano. Ducta ϕ . 7. II.
 tur in subiecto plano ipsi BD ad
 rectos DE, & fiat \equiv AB, iun-
 gantur α AD, AE, EB. Quia
 AB recta est ad subiectum pla-
 num: erunt ang. ABD, ABE re-
 cti α . Sed ang. ABD + CDB ψ α . 3. def. II.

ψ . 29. I.
 \equiv 2 rectis. Ergo CDB erit rectus. Et quia DE
 \equiv AB, & BD communis, & ang. EDB \equiv ABD:
 erit BE α \equiv AD. Hinc in Δ is DAE, EAB α . 4. 2.
 erit ang. EDA α \equiv ABE \equiv recto. Sed & α . 8. I.
 ang. EDB rectus est. Ergo β ED est ad pla- β . 4. II.
 num per BD, DA recta. Iam quia in plano
 per BD, DA sunt ipsae AB γ , BD: patet CD γ . 2. II.
 in eodem plano esse. Itaque & ang. EDC
 rectus α erit. Sed & ang. CDB rectus erat.
 Ergo β CD est ad planum subiectum recta.
 Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.



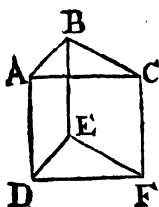
Quae AB, CD ei-
 dem rectae lineae EF
 sunt parallelae, sed non
 in eodem cum illa pla-
 no, etiam inter se par-
 allelae sunt.

Sume in EF punctum G, ex quo duc ad EF
 in plano per AB, EF perpendicularem GH,
 in plano autem per EF, CD perpendicularem
 GK. Quia ergo ang. EGH, EGK recti sunt:
 erit δ EF ad planum per HG, GK recta. Ita- δ . 4. II.
 que AB, CD ad idem planum rectae ϵ erunt, ϵ . 8. II.
 ideoque ζ parallelae. Q. E. D. ζ . 6. II.

X

PROP.

PROP. X. THEOR.



Si duae rectae lineae sese tangentes AB, BC duabus rectis lineis sese tangentibus DE, EF sint parallelae, non autem in eodem plano: illae aequales angulos ABC, DEF continebunt.

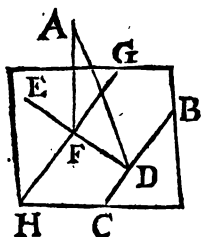
4. 33. 1.

9. 9. 11.

4. 8. 1.

Sume $AB = DE$, & $BC = EF$, & iunge AD, BE, CF, AC, DF. Ergo erunt AD, CF aequales & parallelae ipsi BE, & ideo AD, CF inter se aequales & parallelae⁹ erunt. Quare & $AC = DF$, & ang. $ABC = DEF$. Q. E. D.

PROP. XI. PROBL.



11. 12. 1. &
2. 11.

A dato puncto A in sublimi ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

In subiecto plano duc utcunque rectam BC, & ab A ad BC^{*} demitte perpendicularem AD. Si AD ad

planum subiectum perpendicularis est: factum iam erit propositum. Sin minus: duc ex D in subiecto plano ad BC perpendicularem DE, ad quam in plano EDA ex A^{*} demitte perpendicularem AF. Haec erit desiderata.

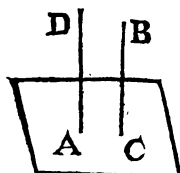
1. constr.

14. 4. 11.

Nam in subiecto plano ducatur per F ipsi BC parallela GH. Et quia¹ ang. BDA, BDE recti sunt, ideoque BC in planum EDA¹⁴ recta

ita est: erit & GH ad idem planum ^{v. 8. II.} recta, & ergo ang. GFA ^ξ rectus. Sed est etiam ang. ^{ξ. 3. def. II.} DFA ^λ rectus. Ergo recta AF est ad planum subiectum ^μ perpendicularis. Q. E. F.

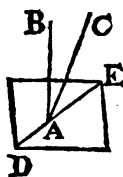
PROP. XII. PROBL.



Dato plano, a puncto A, quod in ipso datum est, ad rectos angulos rectam lineam constituere.

Intelligatur punctum B sublimē, a quo ad datum planum agatur ^{o. II. II.} perpendicularis BC, & huic parallela ^π AD ducatur, quae erit plano dato recta ^{π. 31. L. g. 8. II.}. Q. E. F.

PROP. XIII. THEOR.



Dato plano a puncto A, quod in ipso est, duae rectae lineae AB, AC ad rectos angulos non constituentur ab eadem parte.

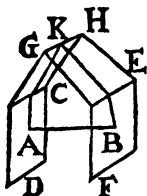
Si enim AB, AC simul essent perpendiculares plano A: ducto per BA, AC plano, quod planum A secet in recta DAE, forent ang. BAD & CAD ^σ recti, ^{σ. 3. def. II.} ideoque aequales; pars & totum. Q. E. A.

PROP. XIV. THEOR.

Ad quae plana CD, EF eadem recta linea AB est perpendicularis, ea parallela sunt.

X 2

Si

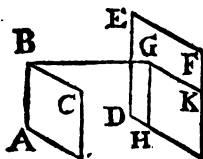


7. 3. def. 11.

17. 1.

Si negas: pone illa producta se secare in recta GH, in qua sumto puncto K, iunge KA, KB. Ergo KAB erit triangulum. Et quia AB est in planum DH perpendicularis, in quo ducta est AK: erit \angle BAK rectus. Similiter ang. ABK rectus erit. Q. E. A^o.

PROP. XV. THEOR.



Si duae rectae lineae AB, BC sese tangentes duabus rectis lineis DE, EF sese tangentibus sint parallelae, non autem in eodem plano: & quae per ipsas transseunt plana AC, DF parallela erunt.

Duc enim ex B in planum DF perpendicularem BG, & per G ipsi ED parallelam HG, ϕ 3. def. 11. ipsi EF vero parallelam GK. Recti ergo ϕ erunt ang. BGH, BGK. Et quia AB, BC ipsi GH, HK sunt \propto parallelae: erunt & ang. GBA, GBC recti ψ . Ergo GB ad planum AC etiam \propto recta erit, & hinc plana AC, DF erunt parallela^a. Q. E. D.

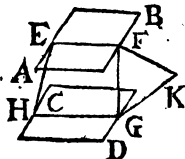
\propto 9. 11.

ψ 29. 1.

ω 4. 11.

ω 14. 11.

PROP. XVI. THEOR.



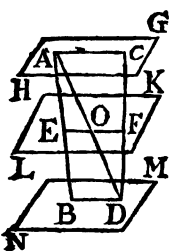
Si duo plana parallela AB, CD ab aliquo plano EFGH secentur: communes ipsorum sectiones FE, GH sunt etiam parallelae.

Si

Si non sint parallelæ : productæ alicubi conuenient, vt in K. Sed quia recta EFK est in β plano AB: erit & punctum K in pla- β . i. n. no AB. Similiter idem K erit & in plano CD. Ergo plana AB, CD producta conuenient, nec ergo parallelæ erunt; contra hyp. γ . 8. def. ii.

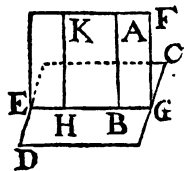
PROP. XVII. THEOR.

G. Si duæ rectæ lineæ AB, CD a parallelis planis GH, KL, MN secantur, in eadem ratione secabuntur ($AE:EB=CF:FD$). Iungantur AC, BD, AD. Occurrat autem AD plano KL in O, & iungantur OE, OF. Ergo quia plana parallelæ KL, MN a plano EODB secantur: erunt δ EO, BD δ . 16. ii. parallelæ. Eadem ratione OF, AC parallelæ erunt. Ergo $AE:EB = AO:OD = CF:FD$. Q. E. D.



PROP. XVIII. THEOR.

F. Si recta linea AB plano alicui CD sit ad rectos angulos: & omnia quæ per ipsam AB transeunt plana EF eidem plano CD ad rectos angulos erunt.

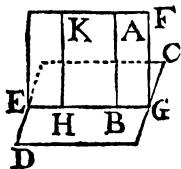


Sit planorum CD, EF communis sectio recta EBG, & ex eius puncto quouis H in plano EF ducatur ipsi GE perpendicularis HK. Iam quia & ang. ABH rectus ζ est: erunt η AB, KH ζ . 3. def. ii. η . 28. i.

X 3

KH

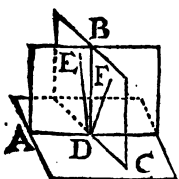
3. 2. II.



KH parallelae; & hinc KH erit ^s ad planum CD recta. Sed item & de reliquis ostendetur, quae vt KH in plano EF ad ipsam EG perpendiculares duci possunt. Ergo pla-

num EF plano CD rectum ⁴ erit. Similiter demonstrabimus, quoduis aliud planum per AB ductum plano CD rectum fore. Q.E.D.

PROP. XIX. THEOR.



Si duo plana se inuicem secantia AB, BC plano alicui AC sint ad rectos angulos: communis ipsorum sectio BD eidem plano AC ad rectos angulos erit.

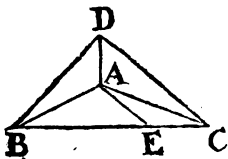
Si negas: duc ex in D plano quidem AB ad AD perpendicularem DE, in plano autem BC perpendicularem DF ad DC. Sunt autem AD, DC communes sectiones planorum AB, BC cum plano AC. Ergo duae rectae ED, FD ad angulos rectos ⁴ constitutae erunt plano AC ab vno puncto D & ab vna parte.

4. def. II.

2. 13. II.

Q. E. A³.

PROP. XX. THEOR.



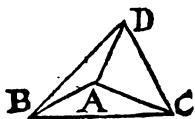
Si solidus angulus A sub tribus angulis planis BAC, CAD, BAD contineatur: duo quilibet CAD, BAD reliquo BAC maiores sunt, quomocunque sumti.

Cas. 1.

Caf. 1. Si ang. BAC, CAD, BAD aequales sunt: evidens est propositio.

Caf. 2. Sed si non sint aequales: sit eorum maximus BAC. In plano per BA, AC fiat ang. BAD = BAE, & capiatur AE = AD, & per E ducatur recta secans ipsas AB, AC in B, C, & iungantur BD, DC. Erit ergo in Δ is BAD, BAE basis BD = BE. Et quia BD + DC > BC, erit DC > EC; & ergo in Δ is ADC, AEC ang. DAC > EAC. Quare DAC + BAD > BAC. Q. E. D.

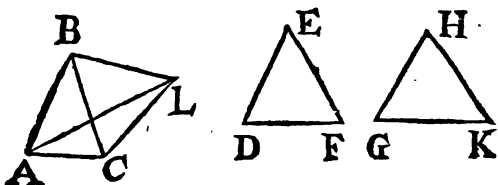
PROP. XXI. THEOR.



Omnis solidus angulus A sub minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

In rectis enim, angulos planos BAC, CAD, DAB continentibus, sumtis quibusvis punctis B, C, D, iungantur BC, CD, DB. Quia ergo solidus ang. B continetur sub 3 planis ang. ABC, ABD, DBC: erunt ang. ABC + ABD > DBC. Eadem ratione in solido ang. C erunt BCA + ACD > BCD, & in solido ang. D erunt CDA + ADB > CDB. Ergo ABC + ABD + BCA + ACD + CDA + ADB > DBC + BCD + CDB id est 2 rectis. Sunt autem ang. ABC + ABD + BCA + ACD + CDA + ADB + BAC + CAD + DAB = 6 rectis. Ergo ang. BAC + CAD + DAB < 4 rectis. Q. E. D.

PROP. XXII. THEOR.



Si sint tres anguli plani ABC, E, H, quorum duo reliquo sunt maiores quomodocunque sumti; contineant autem ipsos rectae lineae aequales AB, BC, DE, EF, GH, HK: fieri potest, ut ex iis AC, DF, GK, quae rectas aequales coniungunt, triangulum constituatur.

4. 1.

Cas. 1. Si ang. $ABC = E = H$: erit $AC = DF = GK$, ideoque duae quaevis ipsarum tertia maiores erunt, ut ergo ex ipsis triangulum constitui queat. Q. E. D.

24. 1.

20. 1.

5. 21. 1.

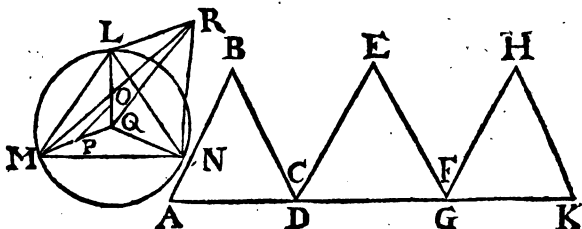
Cas. 2. Si praedicti anguli non fuerint aequales inter se: fiat ang. $CBL = E$, & $BL = AB$, & iungantur AL, LC . Est itaque $CL = DF$, & $CL + AC > AL$. Iam quia ang. $E + ABC > H$, & $E = CBL$, patet esse $\angle LBA > H$, ideoque $AL > GK$. Ergo $DF + AC > AL > GK$. Similiter ostenduntur $AC + GK > DF$, & $DF + GK > AC$. Quum itaque ipsarum AC, DF, GK duae quaevis tertia sint maiores: triangulum ex iisdem construi potest. Q. E. D.

22. 1.

PROP.

PROP. XXIII. PROBL.

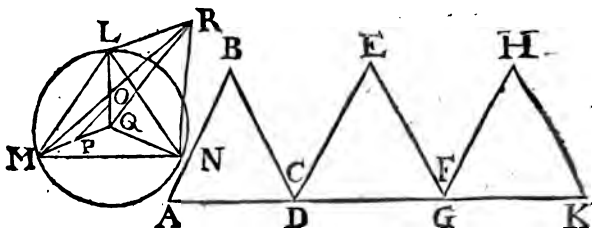
Ex tribus angulis planis ABC, DEF, GHK, quorum duo reliquo sunt maiores quomodocunque sunt, solidum angulum constituere: oportet autem tres angulos quatuor rectis esse minores.



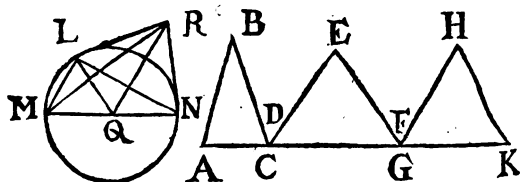
Abſcinde aequales BA, BC, ED, EF, HG, HK, & iunge AC, DF, GK, ex quibus conſtrue Δ . LMN ita yt LM = AC, & MN = DF, & LN = GK, quod ſemper ^{a.} fieri poterit. ^{22. 17.} Dein Δ o. LMN circumscribe ^{b.} circumſculum, & eius plano ex centro Q ad rectos ^{c.} angulos conſtitue ^{3.} rectam, in qua cape ^{12. 11.} QR ^{d.} = $\sqrt{(ABq - LQq)}$, & iunge RL, RM, RN. ^{ſch. 47. 1.} Factum erit.

Primo demonstrabimus, semper esse $AB > LQ$.

Caf. 1. Cadat centrum Q intra Δ . LMN.
Iam si non fit $AB > QL$: erit $AB = QL$ aut
 $< QL$. Sit $AB = QL$. Iunge QM, QN.
Quia ergo $BC = AB = QL = QM$, & AC *constr.*
 $= LM$: erit ang. B $=$ $\angle LQM$. Similiter *8. 1.*
patet esse ang. E $= MQN$, & ang. H $= LQN$.
Ergo erit $B + E + H = LQM + MQN +$
 X_5 LQN

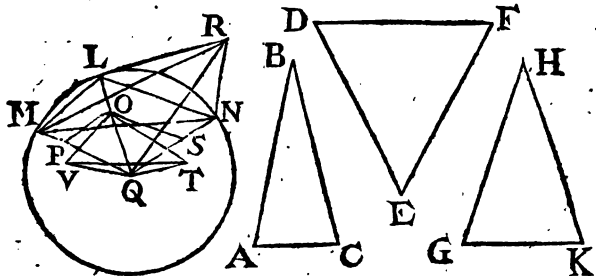


7. 2. sch. $LQN = 4$ rectis; contra hypothesin. Sit
 15. 1. vero $AB < QL$. Cape $QO = QP = AB$,
 & iunge OP . Erit ergo $OL = PM$, & QO :
 9. 2. 6. $OL = QP:PM$. Quare² OP, LM erunt par-
 allelae, & ergo in aequiangularis $\triangle LMQ, OPQ$
 1. 4. 6. erit $QL:LM = QO:OP$. Sed $QL > QO$.
 11. 14. 5. Ergo $LM > OP$. Quia igitur & $AC > OP$,
 12. 25. 1. erit $\angle B > OQP$. Eadem ratione \angle
 $E > MQN$, & $H > LQN$. Ergo, erit $B +$
 $E + H > 4$ rectis; contra hyp. Igitur quia
 AB nec $=$ nec $< QL$: erit $AB > LQ$.



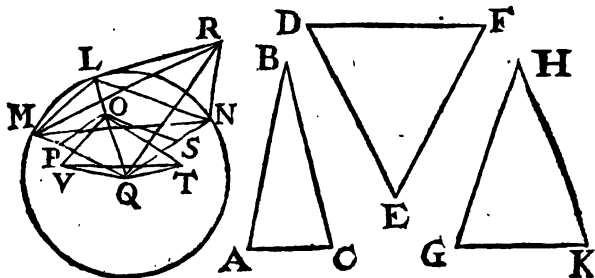
- Cas. 2. Cadat centrum Q in latus MN . Iam
 si dicas $AB = QL$: erunt $DE = EF = AB$
 12. 20. 1. $= QL = QM = QN$, ideoque $DE + EF$
 $= MN = DF$. Q. E. A^o. Si dicas $AB <$
 LQ : erunt $DE + EF < DF$. Q. E. A^o. Er-
 go $AB > LQ$.

Cas.



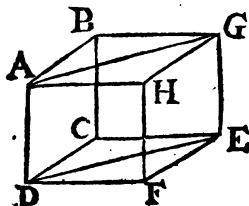
Caf. 3. Sit centrum Q extra Δ , LMN . Iam si dicas $AB = LQ$: erit ang. $B^2 = LQM$, ζ . 8. 1. & $H = LQN$. Ergo $B + H = MQN = E$; contra hyp. Si dicas $AB < QL$: fac $QO = AB$, & $QP = BC$, $QS = HK$, & iunge OP , OS . Ergo $QO = QP = QS$, & uti in *Cafu 1.* demonstrabitur $LM > OP$, & $LN > OS$. Ergo $AC > OP$, & $GK > OS$, & ang. $B^1 > OQP$, & ang. $H > OQS$. Fiat ang. λ . 25. 1. $OQT = H$, & $OQV = B$, & $QT = QV = QO$, & iungantur OV , OT , TV . Erit itaque $OV = AC = LM$, & $OT = GK = LN$. ν . 4. 1. Sed quia ang. $POQ > VOQ$, & $SOQ > TOQ$: erit POT vel $MLN > VOT$, & hinc ξ $MN \xi$. 24. 1. $> VT$, ideoque $DF > VT$. Quum autem $QV = ED$ & $QT = EF$, erit ang. $E >^{\lambda}$ VQT , id est $E > B + H$; etiam contra hypothefin. Itaque $BA > LQ$.

Secundo dico, ang. solidum R esse ex tribus planis B , E , H constitutum. Quia enim QR plano circuli recta est: erunt ang. RQL , RQM , RQN recti. Sunt autem aequales LQ , MQ , NQ . Ergo $RL = RM = RN$. Et quia QRq



- 47. 1. $QRq = ABq - LQq$, ac ob id $QRq + LQq = ABq$: erit $\circ LR = AB$, & ergo $RM = BC$, atque, ob $ML = AC$, ang. $LRM = B$. Eadem ratione ang. $LRN = H$, & ang. $MRN = E$. Quare ex tribus planis B, E, H constitutus est solidus angulus R . Q.E.F.

PROP. XXIV. THEOR.



Si solidum parallelis planis contingatur: opposita ipsius plana & aequalia & parallelogramma sunt.

• 16. 11.

1. Nam quia plana parallela BH, CF secantur a plano AC in rectis AB, DC : erunt $\propto AB, CD$ parallelae. Similiter quia plana AF, BE parallela secantur a plano AC : erunt $\propto AD, BC$ parallelae. Ergo AC est Pgr. Similiter ostenditur, reliqua plana AF, HE, BE, BH, FC esse Pgra. Q. E. D.

2. Iungantur AG, DE . Quia AB, BG ipfis DC, CE sunt parallelae: est ang. $ABG = DCE$.

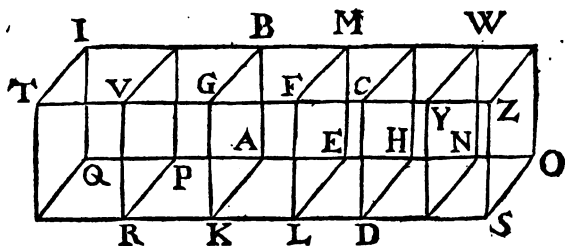
• 10. 11.

DCE. Sed $AB^r = DC$, & $BG = CE$. Er- 34. 1.
 go $\Delta. AGB = DEC$, & igitur Pgr. $BH =$
 Pgr. CF . Similiter ostendetur Pgr. $AC =$
 HE , & Pgr. $AF = BE$. Q. E. D.

* *Scholium.*

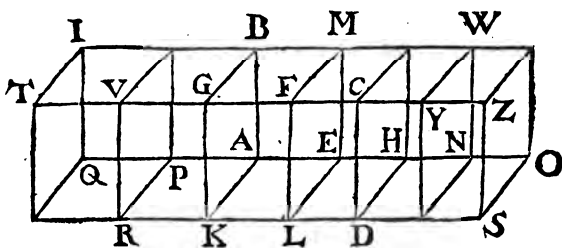
Et quia ostensum est, ang. $ABG = DCE$, &
 $AB : BG = DC : CE$: patet aequiangula esse Pgra.
 opposita, & latera circum aequales angulos propor-
 tionalia habere, ideoque etiam similia esse.

PROP. XXV. THEOR.



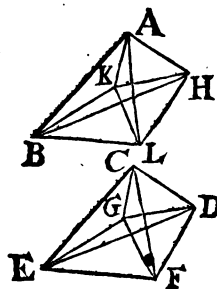
*Si solidum parallelepipedum ABCD plano EF
 secetur oppositis planis AG, CH parallelo: erit
 ut basis AELK ad basin EHDL ita solidum AB-
 FL ad solidum EMCD.*

Produc enim AH vtrinque, & pone ipsi
 EH aequales quotcunque HN, NO, & ipsi EA
 aequales AP, PQ quotuis, & comple Pgra.
 QR, PK, DN, NS, & Ppda PT, AV, HY, NZ.
 Iam quia $QP = PA = AE$: erit τ Pgr. QR 38. 1.
 $= PK = AL$, & Pgr. $PI = PB = BE$. Erit
 quoque Pgr. $TQ = VP = GA$. Ergo tria 24. 11.
 plana solidorum PT, AV, EG tribus planis
 aequantur. Sed tria tribus oppositis ν aequan-
 tur. Ergo ϕ tria solida PT, AV, EG aequa- 30. def. 11.
 lia



lia sunt. Similiter ostenderetur tria solida OY, NC, HF aequalia esse. Ergo basis QL aequae multiplex est basis AL ac solidum TE solidi GE; & eadem ratione basis OL aequae est multiplex basis HL ac solidum OF solidi HF. Porro si basis $QL > = < OL$: est & ϕ solidum $TE > = <$ solido OF. Quare ut basis
 x. 5. def. 5. AL est ad basin HL \propto ita solidum GE ad solidum HF. Q. E. D.

PROP. XXVI. PROBL.



Ad datam rectam lineam AB & ad datum in ipsa punctam A dato angulo solido C aequalem angulum solidum constituere.

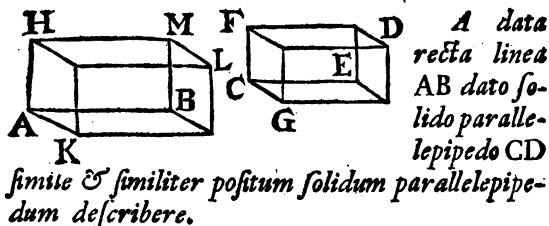
Sint DCE, ECF, FCD anguli plani solidum C continentes. Ex quouis puncto F in recta CF de-

mitte in planum ECD perpendicularem \downarrow FG, quae ipsi occurrat in G, & iunge CG. Dein fac ang. BAH = ECD, & ang. BAK = ECG, & AK = CG; atque ex K plano BAH erige per-

perpendicularem KL , quam fac $\equiv GF$, & α . 12. 11. iunge AL . Dico factum.

Nam fiat $AB \equiv CE$, & iungantur KB , BL , GE , EF . Et quia rectae KL , GF planis BAH , ECD perpendiculares sunt: erunt ang. AKL , BKL , CGF , EGF recti. Dein quia $KA \equiv GC$, & $AB \equiv CE$, & ang. $BAK \equiv ECG$: erit α . 4. 1. $BK \equiv EG$. Sed $KL \equiv GF$. Ergo $AL \equiv CF$, & $BL \equiv EF$; ac inde ang. $BAL \equiv \beta$. 3. 1. ECF . Similiter, sumpta $AH \equiv CD$ & iunctis HK , HL , DG , DF ostendemus ang. $LAH \equiv FCD$. Ergo tres ang. plani BAH , BAL , LAH anguli solidi A tribus planis ECD , ECF , FCD solidi C aequantur. Hinc ang. solidus $A \equiv \gamma$ C. Q. E. F. 7. 22. 11.

PROP. XXVII. PROBL.

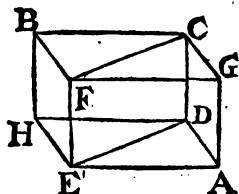


Fac δ angulo solido $C \equiv A$, ita ut angulo δ . 25. 11. $GCE \equiv KAB$, & ang. $FCE \equiv HAB$, & ang. $GCF \equiv KAH$. Dein fac $EC:CG \equiv BA: \alpha$. 12. 6. AK , ac $GC:CF \equiv KA:AH$, & comple Pgr. BH , ac solidum AL .

Etenim ζ Pgr. $KB \sim GE$, & Pgr. $KH \sim \zeta$. 1. def. 6. GF , & quia ex aequo $EC:CF \equiv BA:AH$, & constr. Pgr. $BH \sim EF$. Ergo & tria reliqua Pgra. HL ,

7. sch. 24. 11. HL, LB, LK \sim tribus reliquis DF, DE, DG.
 & 21. 6. Quare Ppd. AL \sim Ppdo. CD. Q. E. D.
 9. 9. def. 11.

PROP. XXVIII. THEOR.



*Si solidum parallelepi-
 pedum AB plano CDEF
 secetur per diagonales
 CF, DE oppositorum pla-
 norum: solidum AB ab
 ipso plano CDEF bifa-
 riam secabitur.*

4. 34. 1. Quia enim Δ . GCF = Δ . CFB, & Δ ADE
 2. 24. 11. = Δ . DEH, & Pgr. AC = BE, & Pgr. GE
 1. 10. def. 11. = CH: Prisma GCFEDA = prismati CF-
 BHDE. Q. E. D.

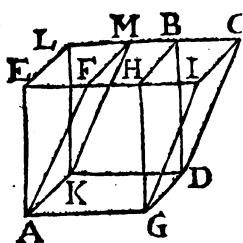
* Schol.

Prismata vero esse illas duas dimidias partes
 Ppd. AB, patet ex 24. 11. & schol. eiusdem, & ex
 eo quod, (per 16. 11.) planum CFED parallelogram-
 mum est. Constat itaque, prisma triangularem
 basin habens dimidium esse parallelepipedum aequae
 alti & in eadem basi GE constituti, vel in basi AH
 basis triangularis dupla.

PROP. XXIX. THEOR.

*Solida parallelepipeda AB, AC in eadem
 basi AD eademque altitudine, quorum insisten-
 tes lineae AE, AF, GH, GI, KL, KM, DB, DC
 in eisdem rectis lineis EI, LC collocantur, inter
 se sunt aequalia.*

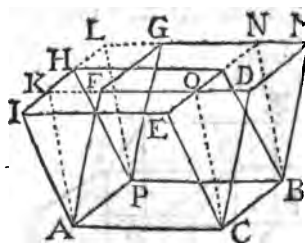
Quia KB & KC sunt Pgra. & inde LB =
 2. 3. ax. 1. KD = MC: erit LM = BC, & ergo Δ .
 LKM



$LKM = BDC$, nec non γ . 8. 1.
 Pgr. $EM = \frac{1}{2} HC$. Ea- ξ . 36. 1.
 dem ratione Δ . $AEF =$
 GHI . Est autem \ast Pgr. θ . 24. 11.
 $LA = BG$, & Pgr. MA
 $= CG$. Ergo Prisma
 $AEFMLK = \ast$ Prism. π . 10. def. 11.
 $GHICBD$. Hinc ad-

dito communi solido $AKDGHFMB$, tota
 Ppda AB, AC aequalia erunt. Q. E. D.

PROP. XXX. THEOR.



Solida parallelepipedum $ABEH$,
 $ABDG$ in eadem
 basi eademque alti-
 tudine, quorum li-
 neae insistentes in
 eisdem lineis rectis
 non collocantur, in-

ter se aequalia sunt.

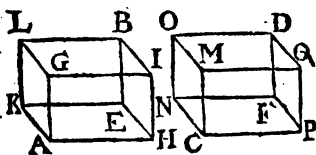
Producantur enim DF, MG, IH, EO , ut
 se inuicem fecerint in K, L, N , & iungantur
 KA, LP, OC, NB . Ergo Ppd. $ABEH = \theta$ ρ . 29. 11.
 $ABNK = \theta$ $ABDG$. Q. E. D.

PROP. XXXI. THEOR.

Solida parallelepipedum AB, CD , quae in
 aequalibus sunt basibus AE, CF , & eadem alti-
 tudine, inter se sunt aequalia.

Y

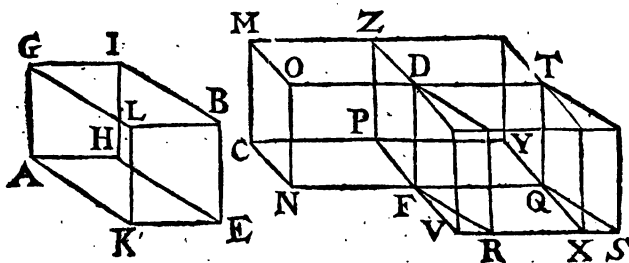
Cas.



Caf. 1. Sint in-
fistentes lineae A
G, BE, HI, KL,
CM, DF, NO, PQ
ad rectos angulos

basibus AE, CF, & fit ang. PFN = HEK,
NF = KE, & FP = EH. Erit ergo Pgr.

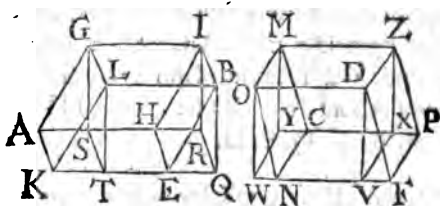
e. 1. def. 6. CF = & \sim Pgro. AE. Eadem ratione quia
altitudines NO, KL aequales, & ang. ONF,
ONC, LKE, LKA recti sunt: erit Pgr. ND
= & \sim ipsi KB, & Pgr. CO = & \sim AL.
Quare & reliqua Pgra reliquis aequalia & si-
milia erunt, & ergo Ppd. CD = τ ipsi AB.
e. 10. def. 11. Q. E. D.



Caf. 2. Sint iterum insistentes perpendicu-
lares, sed ang. PFN non = HEK. Produc
NF in Q, & fac ang. QFR = HEK, & FQ
= HE, & FR = EK, & comple Pgr. QR ac
solidum, TR. Ergo erit Ppd. TR = Ppdo
AB. Produca PF, SR, quae conveniant in V, &
per Q duc ipsi PV parallelam QX, quam produca
donec productae CP occurrat in Y, & comple
Ppda TV, TP, quorum bases sunt Pgra.
VQ,

e. caf. 1.

VQ, PQ. Iam Ppda. TV, TR eandem basin
 TF habentia, aequalia ϕ sunt; & hinc Ppd. ϕ . 29. 11.
 $TV = AB$. Sed quia Pgr. $FX = \propto FS = \psi \propto$. 35. 1.
 $AE = \propto CF$: erit Pgr. $FX : FY = CF : FY$. ψ . constr.
 Atqui Ppd. $TV : TP = \propto$ Pgr. $FX : FY$, nec \propto . 25. 11.
 non Ppd. $CD : TP =$ Pgr. $CF : FY$. Ergo
 Ppd. $TV : TP =$ Ppd. $CD : TP$. Quare Ppd.
 $TV = \beta CD$, ideoque Ppd. $CD = AB$. Q. β . 9. 5.
 E. D.



Caf. 3. Non sint insistentes AG, BE, HI, KL,
 CM, PZ, FD, NO perpendiculares basibus.
 Duc a punctis B, I, G, L, D, Z, M, O ad ba-
 ses perpendiculares BQ, IR, GS, LT, DV, ZX;
 MY, OW, & iunge ST, QR, TQ, RS, XV,
 YW, YX, VW. Erit ergo Ppd. $MV = \gamma$ 7. casus
 GQ. Atqui Ppd. $CD = \delta MV$, & Ppd. AB δ . 29. vel
 $= \delta GQ$. Ergo Ppd. $CD = AB$. Q. E. D. \dagger 30. 11.

* Schol. Itaque Parallelepipida aequalia AB, CD
 aequalium basium aequae alta sunt. Nam si alterius
 AB altitudo maior esset: quia ipsius AB pars capi
 posset aequae alta ipsi CD, foret pars Ppdi. $AB =$
 Ppdi. CD. Ergo Ppda. AB, CD inaequalia forent.

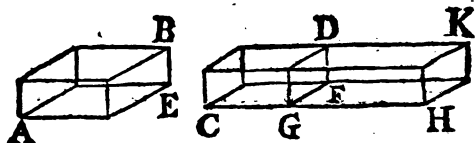
Y 2

PROP.

\dagger Reliqui casus demonstrationem Lector facile ad-
 det. Similis enim est demonstrationi casus se-
 cundi.

PROP. XXXII. THEOR.

Solida parallelepipeda AB, CD, quae eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases AE, CF.

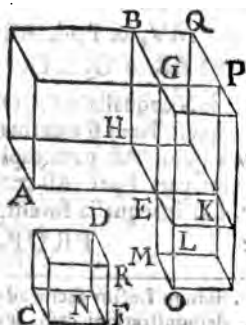


2. 45. 1.
3. 31. 11.
4. 25. 11.

Applicetur ad FG Pgr. FH = AE, & compleatur Ppd. DH = AB. Quia autem totum Ppd. CK secatur plano DG, erit Ppd. DH vel AB ad Ppd. CD sicut basis FH vel AE ad basin CF. Q. E. D.

* *Schol.* Hinc parallelepipedorum aequalium quod maiorem basin habet, minorem habet altitudinem. Non enim eandem; quia sic Ppda inaequalia erunt: nec maiorem; quia sic pars illius Ppdi reliquo aequalita eodem maior, & a potiori totum eodem maius erit.

PROP. XXXIII. THEOR.



Similia solida parallelepipeda AB, CD inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum AE, CF.

In productis AE, HE, GE cape EK = CE, EL = FN, EM = FR. Compte Pgr. KL, & Ppd. KO. Iam quia Ppd.

Ppd. $AB \sim CD$, ideoque \angle ang. $AEH = \angle$ 9. 9. def. 11.
 CFN : erit ang. $KEL = CFN$, ac propterea \angle & 1. def. 6.
 Pgr. $KL = \& \sim CN$. Eadem ratione Pgr. \angle 4. 1. & 34.
 $KM = \sim CR$, & Pgr. $OE = \sim DF$. Quo-
 niam ergo & tria reliqua Pgra tribus reliquis
 aequalia & similia \angle sunt: erit Ppd. $KO = \angle$ sch. 24. 11.
 $\sim^{\angle} CD$. Comple Pgr. HK , & fac Ppda \angle 10. def. 11.
 HP, PL eiusdem altitudinis EG cum Ppda AB .
 Et quia \angle $AE:CF = EH:FN = EG:FR$:
 erit $AE:EK = HE:EL = GE:EM$. Est
 vero \angle $AE:EK = AH:HK$, & $HE:EL = \angle$ 1. 6.
 $HK:KL$, & $GE:EM = \angle$ $PE:KM$. Quare
 $AH:HK = HK:KL = PE:KM$. Porro
 $AH:HK = \angle$ Ppd. $AB:Ppd. BK$; & $HK:KL = \angle$ 32. 11.
 $= \angle$ Ppd. $BK:PL$; & $PE:KM = Ppd. PL:$
 KO . Ergo \div Ppda AB, BK, PL, KO , ideo-
 que $AB:KO = \angle$ $(AB:BK)^3 = (AH:HK)^3 \angle$ 11. def. 5.
 $= (AE:EK)^3 = (AE:CF)^3$. Q. E. D.

Corollarium.

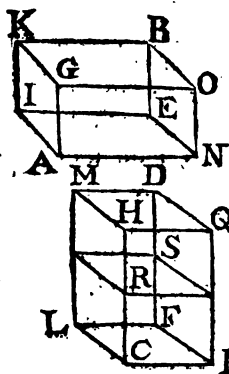
- Hinc, si quatuor rectae lineae continue pro-
 portionales fuerint, est ut prima ad quartam, ita
 solidum parallelepipedum, quod fit a prima, ad
 solidum a secunda simile & similiter descriptum \angle .

PROP. XXXIV. THEOR.

Aequalium solidorum parallelepipedorum AB, CD bases AE, CF sunt reciproce proportionales altitudinibus AG, CH . Et quorum solidorum parallelepipedorum AB, CD bases AE, CF sunt reciproce proportionales altitudinibus AG, CH , ea inter se sunt aequalia.

Y ;

Caf.



π. sch. 31. 11.

π. sch. 32. 11.

ρ. 32. 11.

σ. 1. 6.

τ. 31. 11.

υ. sch. 32. 11.

φ. 9. 6.

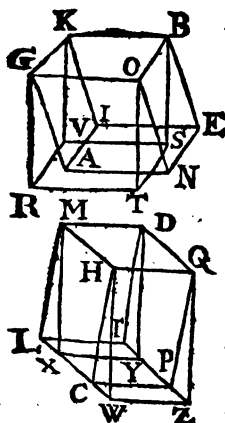
Cas. 1. Si insistentes rectae AG, EB, IK, NO, CH, LM, FD, PQ sunt basibus AE, CF perpendiculares.

Hyp. 1. Si Ppd. AB = CD, & basis AE = CF: erit & alt. AG = CH. Ergo AE:CF = CH:AG. Sin autem alterutra basis AE > altera CF: quia tunc al-

titudo AG < CH, cape CR = AG, & comple Ppd. SC. Iam quia AB = CD, erit AB:CS = CD:CS. Sed AB:CS = AE:CF, & CD:CS = Pgr. CM:Pgr. RL = CH:CR = CH:AG. Quare iterum est AE:CF = CH:AG. Q. E. D.

Hyp. 2. Sit AE:CF = CH:AG. Iam si basis AE = CF: erit & AG = CH, ideoque Ppd. AB = CD. Si vero AE > CF: erit CH > AG. Pone rursus CR = AG, & comple Ppd. CS. Ergo AE:CF = CH:CR. Sed AE:CF = AB:CS, & CH:CR = CM:RL = CD:CS. Ergo AB:CS = CD:CS. Igitur iterum AB = CD. Q. E. D.

Cas.



Caf. 2. Si infistentes AG, EB, CH &c. basibus AE, CF non sunt perpendiculares: demitte \propto in bases perpendiculares GR, BS, OT, KV, HW, MX, DY, QZ, & completa intellige Ppda KT, MZ.

Hyp. 1. Iam si Ppd. AB = CD: quia Ppd. AB = ψ ψ 30. & 29. II. KT, & Ppd. CD = MZ, erit Ppd. KT = MZ. Quum itaque sit \propto BG: DH = DY: BS. *caf. 1.* BS: erit \propto AE: CF = DY: BS. Q. E. D.

Hyp. 2. Deinde si basis AE: CF = alt. DY: BS: erit \propto BG: DH = DY: BS. *Er. a. 24. II.* go Ppd. KT = \propto MZ, ideoque Ppd. AB = ψ CD. Q. E. D.

* *Coroll.*

Ostenfum est sub hyp. 1. *caf. 1.* Ppda. recta CD, CS aequalium & similium basium esse inter se vt altitudines CH, CR. Et quia his duobus Ppdis quacuis alia duo aequalia & aequae alta sumi possunt (per 31. II.): patet in vniuersum duo quaecunque Ppda aequalium basium esse in ratione altitudinum.

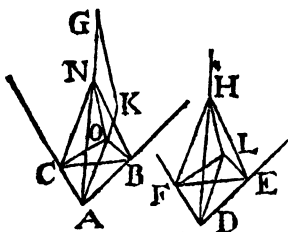
* *Schol.*

Propositiones 31. 32. 33. & 34. cum suis scholiis & corollaris valent quoque de Prismatis triangularibus, propter ea quae ostensa sunt in prop. 28.

Y 4

PROP.

PROP. XXXV. THEOR.



Si sint duo anguli plani BAC, EDF aequales; & in ipsorum verticibus A, D rectae sublimes AG, DH constituantur, quae cum rectis lineis a prin-

cipio positis angulos contineant aequales, alterum GAB, GAC alteri HDE, HDF; in sublimibus autem sumantur quacvis puncta G, H, atque ab ipsis ad plana, in quibus sunt anguli primi BAC, EDF, perpendiculares ducantur GK, HL; & a punctis, K, L, quae a perpendicularibus sunt in planis, ad primos angulos iungantur rectae lineae KA, LD: cum sublimibus aequales angulos KAG, LDH continebunt.

β. 8. II.

γ. 47. I.

δ. 48. I.

ε. 26. I.

ζ. 4. I.

η. 3. AX. I.

Pone $AN = DH$, & in plano AGK duc NO parallelam ad GK, quae ergo plano BAC perpendicularis ^β erit. A punctis O, L duc ad rectas AB, AC, DE, DF perpendiculares OB, OC, LE, LF, & iunge NC, NB, HE, HF, CB, FE. Iam quia $ANq = \gamma NOq + OAq$, & $OAq = \gamma OCq + ACq$, & $NOq + OCq = \gamma NCq$: erit $ANq = NCq + CAq$, ideoque ^δ ang. NCA rectus. Similiter ostenditur ang. HFD rectus. Quare ang. NCA = HFD. Et quia $NAC = HDF$, ac $AN = DH$: erit $AC = DF$. Eadem ratione $AB = DE$. Quare $CB = FE$, & ang. ACB = DFE, & ang. ABC = DEF. Hinc ^η ang. OCB = LFE,

&

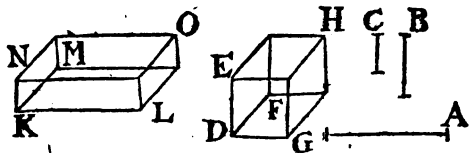
& ang. $OBC = LEF$, & ob $CB = FE$, est $CO = FL$. Vnde patet $\angle AO = DL$. Hinc quoniam $NOq + OAq = ANq = DHq = HLq + LDq$: erit $ONq = HLq$ & $NO = HL$. Igitur constat ang. $KAG = \text{ang. } LDH$. Q. E. D.

Corollar.

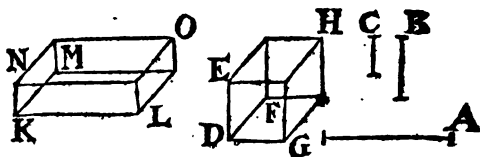
Ex hoc vero manifestum est, si sint duo anguli plani rectilinei aequales, ab ipsis autem constituantur sublimes rectae lineae aequales, quae cum rectis lineis a principio positis aequales contineant angulos, alterum alteri, perpendiculares NO, HL , quae ab ipsis ad plana in quibus sunt primi anguli ducuntur, inter se aequales esse.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si tres rectae lineae A, B, C , proportionales sint: solidum parallelepipedum, quod a tribus fit, aequale est solido parallelepipedo, quod fit a media B , acquilatelo quidem, acquilangulo autem antedicto.



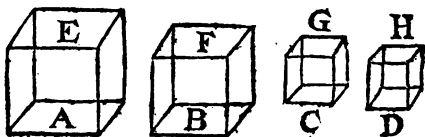
Exponatur angulus solidus D , & ipsi B aequales fiant DE, DG, DF , & compleatur Ppd. DH , quod erit factum a B . Ponatur $KL = A$, & ad punctum K fiat \angle ang. solidus $K = D$, ac $KM = B$, & $KN = C$, & compleatur Ppd. KO , quod erit factum a tribus A, B, C , & aequi-



2. ax. 11. & quiangulum ipsi DH*. Et quia¹ KL:DG =
 29. 1. DE:KN, & ang. LKN = GDE: erit Pgr.
 2. constr. NL =¹⁴ EG. Deinde quia &¹ ang. MKN
 14. 6. = FDE, & ang. MKL = FDG, & KM = DF:
 erunt perpendiculares a punctis M, F ad plana
 1. cor. 35. 11. NL, EG ductae aequales*; id est Ppda DH,
 KO, aequales bases habentia EG, NL, aequa-
 5. 4. def. 6. alta² erunt, ac ergo aequalia*. Q. E. D.
 2. 31. 11.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si quatuor rectae lineae A, B, C, D proportionales sint: & quae ab ipsis sunt solida parallelepipeda E, F, G, H similia & similiter descripta proportionalia erunt. Et si quae ab ipsis sunt solida parallelepipeda E, F, G, H similia & similiter descripta proportionalia sint: & ipsae rectae lineae A, B, C, D proportionales erunt.



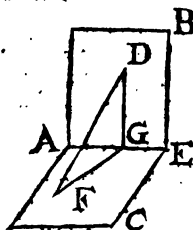
- §. 33. II. I. Nam quia Ppd. $E \sim F$: erit $E : F =$
 $(A : B)^3$. Eodem argumento erit $G : H =$
 $(C : D)^3$. Sed $(A : B)^3 = (C : D)^3$. Er-
 sch. 22. 5. go $E : F = G : H$. Q. E. D.

2. Quia,

2. Quia, ut antea, $E : F = (A : B)^3$, & $G : H = (C : D)^3$, atque $E : F = G : H$ erit $(A : B)^3 = (C : D)^3$, ideoque $A : B = C : D$. *Q. E. D.*

PROP. XXXVIII. THEOR.

Si planum AB ad planum AC rectum sit, & ab uno puncto D eorum, quae sunt in uno plano AB, ad alterum planum AC perpendicularis ducatur: ea in communem planorum sectionem AE cader.



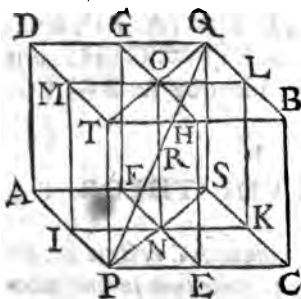
Si negas, cadat extra, ut DF, & a puncto F in plano AC duc ad AE perpendicularem FG, & iunge DG. Iam quia FG perpendicularis est plano AB: erit \angle FGD rectus. Sed & \angle DFG rectus est. Quare in $\triangle GDF$ duo recti sunt. *Q. E. A.*

PROP. XXXIX. THEOR.

Si in solido parallelepipedo AB oppositorum planorum AC, BD latera secantur bisariam; per sectiones vero plana ducantur EFGH, IKLM: communis planorum sectio NO & solidi parallelepipedum diameter PQ se mutuo bisariam secabunt.

Iun-

ϕ . 29. 1.
 χ . 34. 1.
 ψ . 33. 1.



Iungantur QO,
 OT, PN, NS. Quo-
 niam QB, DT, sunt
 parallelæ: erit ang.
 $QLO = \phi OMT$.
 Præterea $QL \propto$
 TM . Et quia ψ
 ML , DQ paralle-
 læ sunt, item DT ,
 GH , QB : erit MO

α . constr. $\propto DG = \alpha GQ = \propto OL$. Quare αQO
 α . 4. 1. $= OT$, & ang. $QOL = MOT$, & ob id β
 β . 3. sch. 15. 1. QOT recta. Similiter demonstratur, $SN =$
 NP , & SNP rectam esse. Et quia PT , SQ ,
 ipsi CB æquales \propto & parallelæ, ipsæ æqua-
 les ψ & parallelæ sunt: erunt & TQ , PS æqua-
 les ψ & parallelæ. Ergo rectæ NO , PQ sunt
 in eodem γ plano TS , & se mutuo secabunt
 in R . Sed quia ϕ ang. $OQR = RPN$, & ang.
 $QOR = PNR$, & $QO = \delta PN$: erit ϵ $OR =$
 RN , & $QR = RP$. Q. E. D.

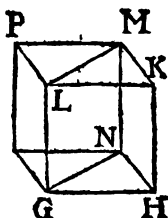
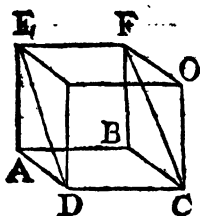
* Schol.

Hinc in omni parallelepipedo diametri omnes
 se mutuo bifecant in vno puncto R.

PROP. XL. THEOR.

Sini duo prismata ABCDEF, GHKLMN
æquealta, quorum unum quidem basin habeat
parallelogrammum ABCD, alterum vero trian-
gulum GHN, & parallelogrammum ABCD du-
plum sit trianguli GHN: æqualia erunt ipsa
prismata.

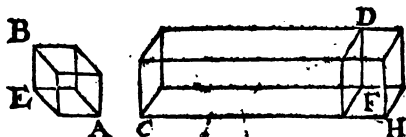
Com-



Compleantur enim Ppda. AO, HP. Et
 quoniam Pgr. AC = 2 Δ GNH = $\frac{2}{3}$ Pgr. GN, $\frac{2}{3}$ 34. 1.
 atque solida aequalta sunt: erit Ppd. AO = $\frac{2}{3}$ 31. 11.
 * HP, ideoque Pr. ABCDEF = $\frac{2}{3}$ Pr. GHKL-
 MN. Q. E. D.

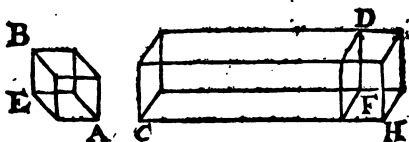
* *Scholium.*

Ex iis quae haecenus ostensa sunt demonstrari
 potest, *parallelepipedum quacumque AB, CD, nec non
 prismata triangularia, esse in ratione composita ba-
 sis AE, CF & altitudinum BE, DF.*



Intelligatur enim aliud Ppd. DH, cuius basis
 FH = basi AE Ppdi. AB, & altitudo DF = al-
 titudini Ppdi CD. Et quoniam est AB : HD = $\frac{1}{2}$ cor. 34. 11.
 BE : FD, & HD : CD = $\frac{2}{3}$ FH : CF = AE : CF: $\frac{2}{3}$ 32. 11.
 erit AB : CD = $\frac{2}{3}$ (AE : CF) + (BE : DF). Er. $\frac{2}{3}$ 5. def. 6.
 go Parallelepipedum, & triangularia prismata, Par-
 allelepedorum dimidia, sunt inter se ut bases &
 altitudines. Q. E. D.

Quae



Quae quum ita sint, patet fundamentum me-
thodi, qua parallelepida & prismata in Geome-
tria practica metiuntur. Sumunt enim cubum AB,
& latus eius BE pro vnitate, qua metiuntur basin
Ppdi CD & altitudinem: & ex multiplicatione
numerosum, qui basin & altitudinem exprimunt,
gignitur numerus, qui soliditatem Ppdi CD ex-
primit. Sit (per 4. sch. 23. 6) basis CF = 9 AE,
& altitudo DF = 2 BE: & quia CD: AB = (CF:
AE) + (DF: BE) = (9:1) + (2:1) = 11;
erit CD = 11 AB.



EV-

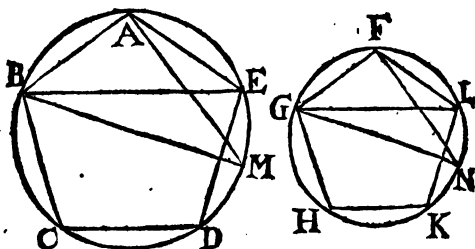
E V C L I D I S

E L E M E N T O R V M

L I B E R X I I.

* * * * *

PROP. I. THEOR.



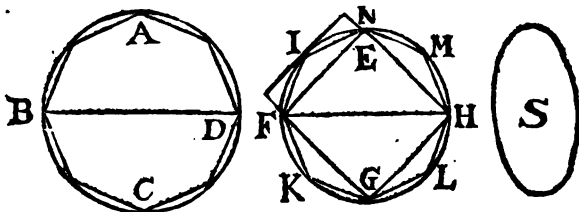
*Similia polygona ABCDE, FGHKL circulis
inscripta inter se sunt ut quadrata a diametris
BM, GN.*

Iungantur BE, AM, GL, FN. Quia po-
lygona similia sunt: est α ang. BAE = GFL, α . 1. def. 6.
& BA : AE = GF : FL; ideoque β ang. AEB β . 6. 6.
= FLG. Ergo ang. AMB = γ FNG; Et, γ . 21. 3. &
quia praeterea ang. BAM = δ GFN, est BM : GN = δ 31. 3.
GN = ϵ BA : GF. Hinc pol. ABCDE : pol. ϵ . 4. 6.
FGHKL = \ast (BA : GF) 2 = λ (BM : GN) 2 λ . 1. sch. 22. 5.
= \ast BMq : GNq. Q. E. D.

** Schol.* Et quia AB : GF = BC : GH &c. =
BM : GN: patet μ similium polygonorum circulis μ . 12. 5.
inscriptorum perimetros AB + BC + CD + DE
+ EA, & FG + GH + HK + KL + LF, esse
in ratione diametrorum.

PROP.

PROP. II. THEOR.



Circuli ABCD, EFGH inter se sunt ut quadrata a diametris BD, FH.

Si negas: erit ut BDq ad FHq ita circulus ABCD ad spatium S circulo EFGH minus vel maius. Sic primo $S < EFGH$. In circulo EFGH descriptum sit $\square HGFE$, quod $\frac{1}{2}$ maius erit dimidio circulo. Circumferentiae EF, FG, GH, HE bisectae \ast sint in I, K, L, M, & iungantur EI, IF, FK, KG, GL, LH, HM, ME. Erit similiter quodlibet $\triangle EIF > \frac{1}{2}$ segmento EIF, quoniam, ducta per I parallela ad EF & completo pgro. rectangulo NF, est $\triangle EIF = \frac{1}{2}$ NF. Reliquis ergo circumferentiis semper bisectis, & talibus triangulis a reliquis segmentis semper ablatis: relinquentur tandem segmenta, quae simul sumta erunt $\ast < EFGH - S$. Sint reliqua haec segmenta, quae sunt super rectis EI, IF, FK, KG, GL, LH, HM, ME. Ergo polygonum EIFKGLHM $> \ast S$. Describe in circulo ABCD polygonum ABCD \cap ipsi EIFKGLHM. Erit ergo illud polygonum ad hoc, ut \ast BDq ad FHq, sive ut \ast circulus ABCD ad spatium S. Minus autem est pol. ABCD

v. 6. 4.

z. sch. 7. 4.

u. 30. 3.

z. 1. 10.

z. 5. ax. 1.

z. 1. 12.

v. hyp.

CD circulo in quo inscriptum est : ergo & polyg. EIFKGLHM \propto S. Q. E. A. Non \propto 14. §. ergo est vt BDq ad FHq ita circ. ABCD ad spatium minus circulo EFGH.

2. Si ponis $S > EFGH$: quia sic erit vt FHq ad BDq ita S ad circ. ABCD, atque S ad circ. ABCD \propto vt circulus EFGH ad spatium minus circulo ABCD: erit vt FHq ad BDq ita circ. EFGH ad spatium minus circulo ABCD. Q. E. N. ϕ Quare vt BDq ad FHq ita circ. ABCD ad circ. EFGH. Q. E. D. ϕ . per part. 1.

* Schol.

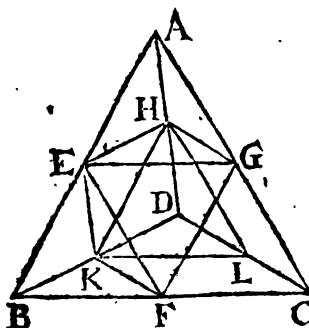
Similia ergo \propto polygona in circulis inscripta. e. 1. m sunt vt iidem circuli.

PROP. III. THEOR.

Omnis pyramis ABCD † triangularem habens basin ABC dividitur in duas pyramides aequales & similes inter se, quae triangulares bases habent, earque similes toti, nec non in duo prismata aequalia, quae dimidio quidem totius pyramidis sunt maiora.

Biseca

† Nota, litterarum pyramidem designantium ultimam nobis semper eam esse, quae vertici est opposita, tres autem priores eas, quae ad basin pertinent. Contra, in angulo solido designando prima est quae ad verticem.



Biseca enim AB, BC, CA, AD, DB, DC, in punctis E, F, G, H, K, L, & iunge EG, EH, HG, per quas ductum planum abscinder pyramid. AEGH. Iunge etiam HK, KL, LH, & ducto per has plano a reliquo

solido abscinderetur pyr. HKLD. Iam quia $AE = EB$, & $AH = HD$: erunt EH, BD \propto parallelae. Similiter quia $AH = HD$, & $BK = KD$: erunt & HK, AB \propto parallelae. Quare $HK = \frac{1}{2} BE = EA$. Sed est $\angle KHD = \angle EAH$. Ergo $\triangle KDH \sim \triangle EHA$. Eodem modo patet $\triangle HDL \sim \triangle HAG$, & $DL = GH$. Et quia ob parallelas EH, BD, & HG, DC, $\angle KDL = \angle EHG$; erit $\triangle KDL \sim \triangle EHG$. Eadem ratione ostenditur $\triangle KHL \sim \triangle EAG$. Ergo pyr. HKLD \sim pyr. AEGH. Porro, quum AB, HK parallelae sint, $\triangle ADB, \triangle HDK$ aequiangula, ideoque $\triangle BDC \sim \triangle KDL$; nec non $\triangle ADC \sim \triangle HDL$; atque, quum sit $\angle BAC = \angle KHL$, & $BA : KH = AD : DH = AC : HL$, $\triangle BAC \sim \triangle KHL$. Hinc erit pyr. BACD \sim pyr. KHL D \sim pyr. AEGH.

2. 4. 6.

3. 34. 1.

4. 29. 1.

5. 4. 1. &

sch. 6. 6.

6. 10. 11.

7. 10. def. 11.

8. 3. sch. 4. 6.

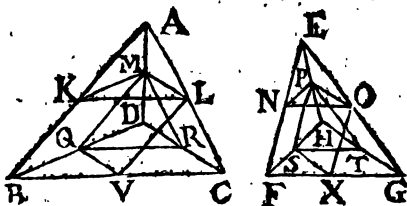
9. 2. sch. 4. 6.

10. 6. 6.

Deinde iunctis KF, FG, reliquum solidum diuidi poterit in duo prismata, quorum vnum habet

Habet basin Pgr. EGFB, & lineam basi oppositam HK, alterum basin Δ GFC & oppositam basin Δ HKL. Sunt ergo haec prismata aequae alta, &, quia Pgr. EGFB \equiv $\frac{1}{2}$ Δ GFC, aequalia ⁹. Sed pyramide EFBK, ^{9. 41. 1.} quae fit iunctis EK, EF, malus est prisma ^{9. 40. 11.} EGFBKH; & pyr. EBFK \equiv $\frac{1}{2}$ pyr. AEGH (aequalibus enim & similibus triangulis continentur): ergo Pr. EGFBKH + Pr. GFCLKH $>$ pyr. AEGH + pyr. HKLD. Est autem Pr. EGFBKH + Pr. GFCLKH + pyr. AEGH + pyr. HKLD \equiv pyr. ABCD. Ergo pr. EGFBKH + pr. GFCLKH $>$ $\frac{1}{2}$ pyr. ABCD. Q. E. D.

PROP. IV. THEOR.

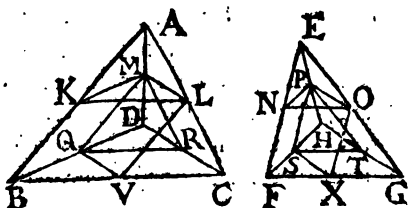


Si sint duae pyramides aequae altae ABCD, EFGH, quae triangulares bases habent ABC, EFG; diuidatur autem utraque ipsarum & in duas pyramides AKLM, MQRD, ENOP, PSTH, aequales inter se similesque toti, & in duo prismata aequalia KLVBQM, LVCRQM, NOXFSP, OXGTSP; atque ortarum pyramidum utraque eodem modo diuidatur, idque semper fiat: erit ut unius pyramidis basis ABC ad basin EFG alterius, ita prismata omnia in

Z 2

vna

una pyramide ABCD ad prismata omnia in al-
tera pyramide EFGH numero aequalia.



15. 5.

22. 6.

A. Lemma
sequens.

7. 5.

12. 5.

Quia $BC = 2 CV$, & $FG = 2 GX$: erit BC :
 $CV = FG:GX$. Sed quum, vt in præcedenti
propositione, constet, $\triangle ABC \sim \triangle VLC$,
& $\triangle FEG \sim \triangle XOG$: erit $\triangle ABC$: $\triangle VLC$
 $= \triangle FEG$: $\triangle XOG$, & alternando $\triangle ABC$:
 $\triangle FEG = \triangle VLC$: $\triangle XOG$. Sed $\triangle LVC$:
 $\triangle XOG =$ pr. $VLCRQM$: pr. $XOGTPS$
 $=$ pr. $KLVBQM$: pr. $NOXFSP$. Ergo \triangle
 ABC : $\triangle FEG =$ pr. $VLCRQM$ + pr.
 $KLVBQM$: pr. $XOGTPS$ + pr. $NOXFSP$.
Idem vero demonstrabitur de pyramidibus
 $AKLM$, $ENOP$, scilicet vt basis AKL ad basin
 ENO ita esse duo prismata aequalia in pyr.
 $AKLM$ ad duo prismata aequalia in pyr. $EN-$
 OP . Itaque, quia eodem, quo modo vsi su-
mus, argumento, patet esse $\triangle ABC$: $\triangle EFG$
 $= \triangle AKL$: $\triangle ENO$: erant' vt $\triangle ABC$ ad
 $\triangle EFG$ sic 4 prismata in pyr. $ABCD$ ad 4 pri-
smata in pyr. $EFGH$. Et similiter procedit
demonstratio ad quocunque paria prismatum
in vtraque pyramide. Q. E. D.

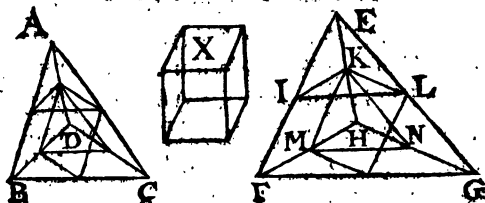
LEM.

L E M M A.

Ostendendum est, vti $\triangle LVC$ ad $\triangle XOG$ ita esse prisma $VLCRQM$ ad prisma $QXGTPS$.

Intelligentur enim ex punctis D, H in bases VLC, XOG demissa perpendiculara, quae ^{a. hyp. & 4.} aequalia erunt. ^{def. 6.} Iam quia perpendicularis ex D demissa, & recta DC secantur a planis QMR, VLC , quae ob parallelas ^r MR & AC , ^{r. dem. 3. 12.} RQ & CV parallela ^r sunt; erit pars perpendicularis inter D & planum MQR ad partem reliquam ^r, vt DR ad RC . Sed $DR =$ ^r RC ; ^{r. hyp.} quare pars perpendiculari inter basin VLC & basin oppositam QMR prismatis $VLCRMQ$ erit dimidium perpendiculari totius ex D demissi. Eadem ratione pars perpendiculari ex H cadentis, quae est inter bases prismatis $QXGTSP$ dimidium erit totius. Erunt ergo prismata $VLCRMQ$ & $QXGTSP$ aequae alta, ^{r. 7. 22. 1.} ac ob id in ratione ^r basium VLC, XOG . ^{r. 32. 11.} Q. E. D.

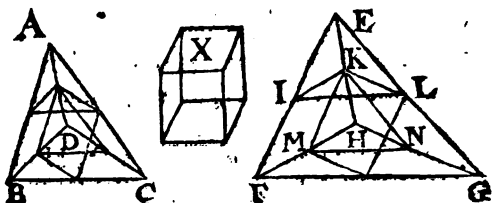
PROP. V. THEOR.



Pyramides $ABGD, EFGH$, quae in eadem sunt altitudine, & triangulares bases ABG, EFG habent, inter se sunt vt bases ABC, EFG .

Z 3

Si

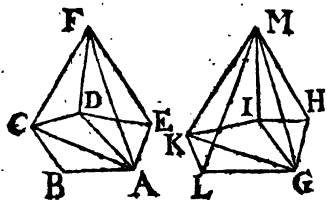


Si negas: fit $ABC: EFG = ABCD: X$, sitque primo $X < \text{pyr. EFGH}$. Diuidatur pyr. EFGH vt in prop. III. & rursus pyramides ortae eodem modo diuidantur, fiatque hoc
 1. 1. 12. semper, vsque dum \times duae reliquae pyramides $EILK + KMNH < \text{pyr. EFGH} - X$. Erunt itaque reliqua duo prismata in pyr. EFGH $> \psi$ solido X. Diuidatur etiam pyr. ABCD similiter & in totidem partes ac pyr. EFGH. Ergo prismata in pyr. ABCD erunt
 1. 3. 12. ad prismata in pyr. EFGH $= ABC: EFG = ABCD: X$. Quare quum pyr. ABCD sit maior prismatis quae in ipsa sunt: erit & solidum X maius α quam prismata in pyr. EFGH, & ergo α quam ipsa pyramis EFGH; contra hypothesein.

Sed pone $X > \text{pyr. EFGH}$. Erit ergo vt X ad pyr. ABCD, ita α pyr. EFGH ad solidum pyramide ABCD minus. Sed inuertendo est $EFG: ABC = X: ABCD$. Ergo vt EFG ad ABC ita pyr. EFGH ad solidum pyramide ABCD minus. Q. E. A^s. Erit itaque X nec $<$ nec $>$ pyr. EFGH, sed ipsi aequale. Ergo $ABC: EFG = ABCD: EFGH$. Q. E. D.

PROP.

PROP. VI. THEOR.

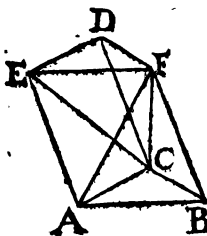


*Pyramides AB-
CDEF, GHIKL-
M, quae in eadem
sunt altitudine,
& polygonas ba-
ses habent, inter
se sunt ut bases.*

Bases diuidantur in triacula ABC, ACD, ADE, GHI, GIK, GKL, super quibus intel-
ligantur pyramides aequae altae ipsis ABCDEF,
GHIKLM. Iam quia pyr. ABCF : ACDF
 $\equiv \gamma \triangle ABC : \triangle ACD$: erit componendo γ. 5. 12.
pyr. ABCDF : pyr. ACDF \equiv ABCD : ACD.
Sed pyr. ACDF : ADEF $\equiv \gamma$ ACD : ADE.
Ergo ex aequo pyr. ABCDF : ADEF \equiv bas.
ABCD : ADE, & componendo pyr. ABCDEF :
ADEF \equiv bas. ABCDE : ADE. Eadem ra-
tione pyr. GHIKLM : GKLM \equiv bas. GHI-
KL : GKL. Sed pyr. ADEF : GKLM $\equiv \gamma$
bas. ADE : GKL. Ergo ex aequo pyr. ABC-
DEF : GKLM \equiv bas. ABCDE : GKL. At-
qui est inuertendo pyr. GKLM : GHIKLM
 \equiv bas. GKL : GHIKL. Quare ex aequo pyr.
ABCDEF : GHIKLM \equiv bas. ABCDE : GHI-
KL. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.

*Omne prisma ABCDEF triangularem ha-
bens basin ABC diuiditur in tres pyramides
aequales inter se, quae triangulares bases habent.*



6. 34. 1.

6. 5. 12.

Iungantur enim AF, CE, CF: & orientur tres pyramides, triangulares bases habentes, ABFC, EAFC, CDEF. Iam quia ABFE est Pgr. eiusque diameter AF: erit $\triangle ABF = \triangle EAF$. Ergo pyr. ABFC = pyr. EAFC. Sed pyr. EAFC eadem est quae pyr. AECF; atque pyramides AECF, CDEF, aequales bases ACE, CDE & eundem verticem F habentes, aequales sunt. Ergo pyr. ABFC = pyr. EAFC = pyr. CDEF. Q. E. D.

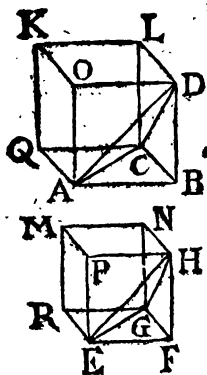
4. 2. 12. 1.

Cor. Et quia pyr. ABFC eadem est cum pyr. ABCF: manifestum est pyramidem ABCF, quae cum prismatico ABCDEF eandem habet triangularem basin ABC & eandem altitudinem, tertiam partem esse prismatis. Ergo¹ omnis pyramis tertia pars est prismatis basin habentis eandem, & altitudinem aequalem: quoniam, si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, dividitur in prismata, quae triangulares habent bases.

PROP. VIII. THEOR.

Similes pyramides ABCD, EFGH, quae triangulares bases ABC, EFG habent, sunt in triplicata ratione homologorum laterum AB, EF.

Compleantur solida ppda ABKL, EFMN. 3. 9. def. 11. Et quia pyr. ABCD, pyr. EFGH: erit² ang. ABD = EFH, & ang. ABC = EFG, & ang.



ang. $DBC = HFG$, & $DB:$

$HF = BA: FE = BC: FG$.

Ergo erit Pgr. $BO \sim$ pgr. HL def. 6.

FP , & pgr. $BL \sim$ pgr. FN ,

& pgr. $BQ \sim$ pgr. FR .

Tria ergo reliqua pgra. KC ,

AK , KD tribus reliquis

pgris MG , EM , MH simi-

lia * erunt. Hinc Ppd. BK x. sch. 24. 11.

\sim Ppd. FM , ac ergo

Ppd. $BK: Ppd. FM =$ a. 33. 11.

$(AB: EF)^3$. Sed quia py-

ramides $ABCD$, $EFGH$ sunt sextae partes ^{11. cor. 7. 12.}

Ppdorum BK , FM : erit * Pyr. $ABCD: pyr.$ & sch. 28. 11.

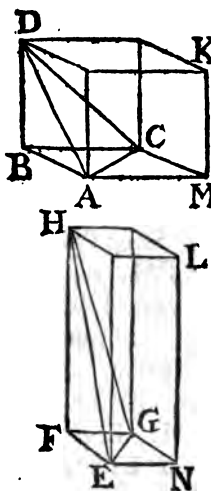
$EFGH = Ppd. BK: Ppd. FM$. Ergo Pyr. ^{11. 15. 5.}

$ABCD: pyr. EFGH = (AB: EF)^3$. Q.

E. D.

Coroll. Ex hoc perspicuum est, similes pyramides, quae polygonas habent bases, inter se esse in triplicata ratione homologorum laterum. Iphis enim diuisis in pyramides triangulares bases habentes; quoniam & similia polygonas basium in triangula numero aequalia & homologa totis & diuiduntur: erit * vt vna pyramis in altera pyramide triangularem basin habens ad vnā pyramidem in altera triangularem basin habentem, ita tota illa pyramis polygonam basin habens ad totam hanc. Sed pyramides istae triangularium basium sunt in triplicata ratione laterum homologorum: Ergo & pyramides polygonarum basium.

PROP. IX. THEOR.



Aequalium pyramidum
 ABCD, EFGH triangula-
 res bases habentium, bases
 ABC, EFG sunt altitudini-
 bus DB, HF reciproce pro-
 portionales. Et quarum py-
 ramidum, triangulares ba-
 ses habentium, bases ABC,
 EFG sunt altitudinibus DB,
 HF reciproce proportiona-
 les, illae inter se aequales
 sunt.

Hyp. 1. Compleantur
 enim solida parallelepipe-
 da BK, FL pyramidibus
 aequae alta. Et quia Ppd. BK = 6 pyr. ABCD
 = 6 pyr. EFGH = Ppd. FL: erit vt HF:
 DB = * BM: FN = * ABC: EFG. Q. E. D.

* 34. 11.
 * 34. 1.

Hyp. 2. Quia vt HF: DB = ABC: EFG
 = * BM: FN: erit Ppd. BK = * Ppda FL,
 e. 6. ax. 1. ergo Pyr. ABCD = * Pyr. EFGH. Q. E. D.

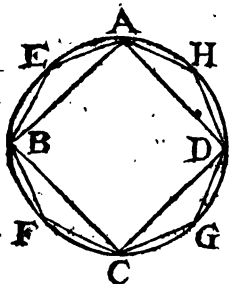
* *Schol. 1.* Idem de pyramidibus polygonarum
 basium valet (per cor. 7. 12. & sch. 34. 11): quia in
 pyramides triangularium basium dividi possunt.

* 2. Quae de pyramidibus demonstrata sunt in
 prop. 6. 8. 9; ea & quibuscunque prismatis con-
 veniunt, quippe quae tripla sunt pyramidum ead-
 em bases & altitudines habentium.

* 3. Hinc autem per se patet ex sch. 40. 11. di-
 mensio quorumvis prismatum & pyramidum.

PROP.

PROP. X. THEOR.



*Omnis conus tertia pars
est cylindri, qui eandem
basin ABCD habet, & al-
titudinem aequalem.*

1. Si negas: sit cylindrus $>$ triplo con. Describatur in circulo quadratum ABCD, super quo intelligatur prisma aequale altum cylindro. Et quia hoc prisma dimidium est prismatis aequae alti ^{7. 32. II.} super quadrato circa circulum circumscripto erecti; dimidium autem huius prismatis $>$ dimidio cylindro: erit & illud prisma $>$ dimidio cylindro. Bisecentur peripheriae in punctis E, F, G, H, quae connectantur rectis, atque a Δ is AEB, BFC, CGD, DHA intelligantur erecta prismata cylindro aequae alta. Et quoniam unumquodque horum prismatum dimidium est ^{u. sch. 29. II.} Ppdi aequae alti erecti super Ppro. rectangulo trianguli duplo; hoc autem Ppdam $>$ respectiuo segmento cylindri: patet, unumquodque horum prismatum $>$ esse dimidio respectiuo segmenti cylindri. Igitur reliquas circumferentias bisecantes, & super singulis, quae orientur, triangulis prismata erigentes, & hoc semper facientes, relinquemus tandem ^{q. I. 10.} segmenta cylindri, quae simul sumpta minora erunt excessu cylindri supra triplum con. Sint reliqua haec segmenta, quae super segmentis circuli AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA



2. cor. 7. 12.

Q. E. A.

HA constituent. Igitur prisma, quod basin polygonam AEBFCGDH habet, & cylindro aequae altum est, erit $>$ triplo coni; ideoque pyramis, cuius basis est AEBFCGDH, & vertex idem qui coni, $\times >$ erit cono; pars toto.

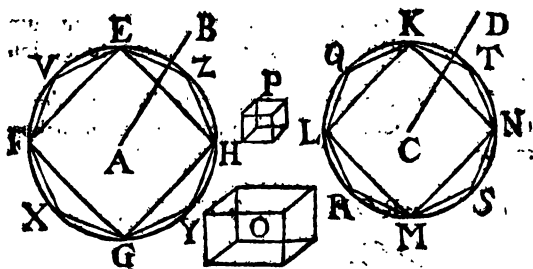
ψ. 6. 12.

2. Sit cylindrus $<$ triplo coni: erit conus $> \frac{2}{3}$ cylindri. Sed quia iisdem, quibus modo vñ sumus, argumentis ψ, euincitur, pyramidem cono aequae altam & cuius basis est quadratum ABCD $>$ esse dimidio coni, & vnamquamque pyramidum cono aequae altarum super triangulis AEB, BFC &c. $>$ esse dimidio respectui segmenti coni: iterum patet, circumferentias semper bisecando, & super ortis sic triangulis pyramides semper erigendo, relictum iri segmenta coni minora excessu coni supra $\frac{2}{3}$ cylindri. Sint haec segmenta, quae sunt super segmentis circuli AE, EB, BF &c. Quare quum reliqua pyramis, cuius basis est polyg. AEBFCGDH, & vertex idem qui coni $>$ sit $\frac{2}{3}$ cylindri: erit prisma cono vel cylindro aequae altum & basin polyg. AEBFCGDH habens maius \times quam cylindrus; pars quam totum. Q. E. A.

PROP. XI. THEOR.

Coni & cylindri, qui eandem habent altitudinem AB, CD, inter se sunt ut bases EFGH, KLMN.

1. Sit



1. Sit ut circ. EFGH ad circ. KLMN ita
 conus FB ad aliud solidum O, quod sit $<$ co-
 no LD; & sit $LD - O = P$. Supposita
 praeparatione & argumentatione praecedentis
 propositionis, erunt segmenta coni, quae
 in ipsis QL, LR, RM &c. $<$ P. Ergo pyr.
 KQLRMSNTD $>$ O. Fiat in circ. EFGH
 simile polygonum EVFXGYHZ. Iam quia
 pyr. EVFXGYHZB: pyr. KQLRMSNTD $=^a$ n. 6. 12.
 polyg. EVFXGYHZ: pol. KQLRMSNT $=^a$ a. sch. 2. 12.
 circ. EFGH: circ. KLMN $=^b$ conus FB: O $=^b$ hyp.
 atque pyr. EVFXGYHZB $<$ γ cono FB: erit δ γ . 9. ax. 1.
 & pyr. KQLRMSNTD $<$ δ solido O; quod
 repugnat ostensis. Non ergo est ut basis A
 ad basin C ita conus A ad solidum cono C
 minus.

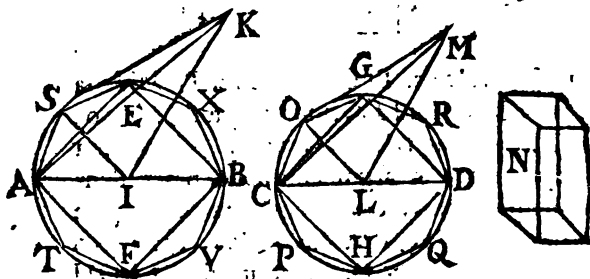
2. Si ponis O $>$ cono LD: erit ut O ad
 conum FB, ita conus LD ad solidum δ minus
 cono FB, & ergo ut circ. KLMN ad circ. EF-
 GH, ita conus LD ad solidum minus cono
 FB. Q. F. N. Itaque coni aequae alti, & s. part. 1.
 proinde cylindri δ aequae alti, sunt inter se ut δ 10. 12.
 bases. Q. E. D.

* Schol.

* *Schol. V.* Coni ergo, item cylindri, quorum tam bases quam altitudines aequales sunt, ipsi inter se aequales sunt.

* 2. Quare conorum, item cylindrorum, aequales bases habentium, qui maiorem axin habet, maior est.

PROP. XII. THEOR.



Similes conus & cylindri inter se sunt in triplicata ratione diametrorum basium AB, CD.

Sint bases circuli AEBF, CGDH, & axes IK, LM; & fit conus AEBFK ad solidum quoddam N in triplicata ratione ipsius AB ad CD.

1. Pone N < cono CGDHM. Factis hisdem quae in praecedentibus, eodem modo ostendemus esse aliquam pyramidem GOCPLHQDRM in cono CDM, quae maior sit quam N. Fiat in circ. I simile polygonum ASEXBVFT, quod sit basis pyramidis verticem cum cono ABK communem habentis. Sint in his duabus pyramidibus triangula CMO, AKS quaedam ex iis quae pyramides continent, & iunctae sint LO, IS. Iam quia conus ABK ~ cono CDM, est $AB : CD = IK : LM$, ac er-

go

go $AI:IK = CL:LM$. Sed ⁹ ang. KIA, 9. 11. def. 11.
MLC recti sunt: ergo $\Delta. AKI \sim \Delta. CML$. ^{6. 6.}

Similiter, quia $AI:IS = CL:LO$, & ang.

$AIS^* = CLO$, erit $\Delta. ASI \sim \Delta. COL$; & ^{2. 2. sch.}

iterum similiter patet esse, $\Delta. SKI \sim \Delta. OML$. ^{33. 6.}

Hinc quia ¹ $KA:AI = MC:CL$, & $AI:AS$ ^{1. 1. def. 6.}

$= CL:CO$: erit ex aequo $KA:AS = MC:$

CO . Similiter quia $KS:SI = MO:OL$, & $SI:$

$SA = OL:OC$: erit ex aequo $KS:SA = MO:$

OC . Ergo $\Delta. ASK \sim \Delta. OMC$. Quoniam ^{11. sch. 5. 6.}

igitur pyr. $ASIK \sim$ pyr. $COLM$: erit pyr. ^{9. 9. def. 11.}

$ASIK$: pyr. $COLM = \frac{1}{2} (AI:CL)^3$. Sed idem

de reliquis pyramidibus $ATIK$, $CPLM$ &c.

ostendemus. Ergo ⁹ pyr. $ASEXBVFT$: pyr.

$GOCPHQDRM = (AI:CL)^3 = \pi (AB:$

$CD)^3 = \pi$ con. $AEBFK:N$. Quare pyr. $GO-$

$CPHQDRM <$ ⁹ solido N ; contra modo

dicta.

2. Si ponas $N >$ cono $CGDHM$: quia $N:$

$AEBFK = \pi (CD:AB)^3$, & ⁹ N ad $AEBFK$

vti conus; $CGDHM$ ad solidum cono $AEBFK$

minus: erit conus $CGDHM$ ad solidum quod-

dam cono $AEBFK$ minus in triplicata ratione

ipsius CD ad AD . Q. F. N. ^{7. part. 1.}

Ergo tam co- ^{9. 10. 11.}

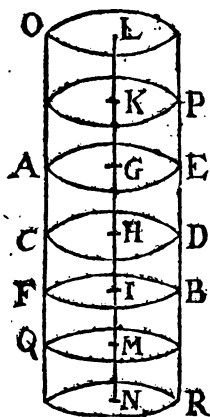
ni, quam ⁹ cylindri, sunt in triplicata ratione

diametrorum basium. Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

*Si cylindrus AB plano CD secetur, oppositis
planis AE, FB parallelo, erit vt cylindrus AD
ad cylindrum DF ita axis GH ad axem HI.*

Pro-



Producatur utrinque axis GL, & fiant ipsi GH aequales quocunque GK, KL, & ipsi HI aequales quovis IM, MN. Per puncta L, K, M, N ducantur plana ipsis AE, CD parallela, in quibus fiant circa centra L, K, M, N circuli ipsis AE, FB aequales; & inter hos circulos intelligantur cylindri OP, PA, BQ, QR constituti. Quia

φ. 1. sch.
11. 12.

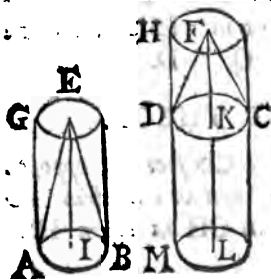
cylindri OP, PA, AD inter se ϕ , aequales sunt; quotuplex est axis LH ipsius GH, totuplex est cyl. OD ipsius AD. Similiter, quotuplex est axis HN ipsius HI, totuplex est cyl. CR cylindri DF. Praeterea si axis LH $> = <$

z. 2. sch.
11. 12.

ψ. 4. def. 3.

HN: erit z & cyl. OD $> = <$ cyl. CR. Ergo cyl. AD: cyl. DF $= \downarrow$ ax. GH: ax. HL. Q. E. D.

PROP. XIV. THEOR.

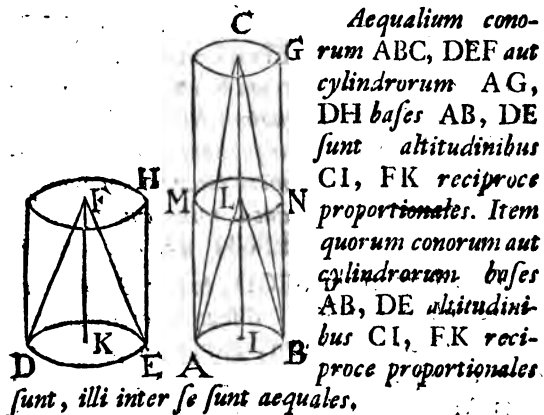


Aequalibus basibus AB, CD insistentes sunt ABE, CDF aut cylindri BG, CH inter se sunt ut altitudines EI, FK.

Producatur axis FK, ut fiat KL = EI, & circa axem KL in basi

basi CD sit cyl. CM, qui erit \equiv cyl. BG. a. 1. sch.
 Ergo cyl. BG : cyl. CH \equiv cyl. CM : cyl. CH 11. 12.
 \equiv KL : FK \equiv EI : FK. Quare & conus a. 13. 12.
 ABE : con. CDF \equiv EI : FK. Q. E. D. b. 15. 5.

PROP. XV. THEOR.



Cas. 1. Si altitudines aequales sunt: patet in utraque hypothesi etiam bases aequales esse; & constat ergo propositio.

Cas. 2. Sit $CI > FK$. Fiat $LI \equiv FK$, & per L secetur cylindrus AG plano MN basi bus parallelo.

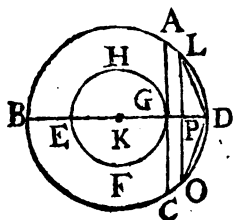
Hyp. 1. Et quia cyl. AG \equiv DH: erit cyl. AN : cyl. AG \equiv cyl. AN : cyl. DH \equiv bas. AB : DE. Sed cyl. AN : cyl. AG \equiv LI : CI \equiv FK : CI. Ergo AB : DE \equiv FK : CI. Q. E. D. 7. 11. 12. 8. 13. 12. & 18. 5.

Hyp. 2. Sit bas. AB : bas. DE \equiv alt. FK : alt. CI. Est autem bas. AB : bas. DE \equiv cyl. AN : AN:

AN: cyl. DH, & FK: CI = LI: CI = cyl.
 AN: cyl. AG. Ergo cyl. DH = cyl. AG.
 Q. E. D.

Similiter autem & in conis.

PROP. XVI. PROBL.



Duobus circulis ABCD, EFGH circa idem centrum K consistentibus, in maiori ABCD polygonum aequalium ac parium numero laterum describere, quod minorem circulum EFGH non tangat.

2. 30. 3. Duc diametrum BEGD, & per G ipsi perpendicularem AGC. Biseca semicirculum BAD, ac eius semissem, atque ita perge donec relinquatur circumferentia LD minor ipsa AD. Ab L in BD duc perpendicularem LPO. Iunge LD, DO, quae aequales erunt. 4. 1. 10. 3. 3. 3. & 4. 1. 1. cor. 16. 3. Jam quia AC circulum EFGH tangit, LO vero ipsi AC parallela est extra hunc circulum: LO eum non tanget; multoque minus rectae LD, DO eundem tangent. Si ergo ipsi LD aequales deinceps in circulo ABC aptauerimus: fiet polygonum aequalium & parium laterum (quia circumf. LD est pars aliquota semicirculi), circulum EFGH non tangens. Q. E. F.

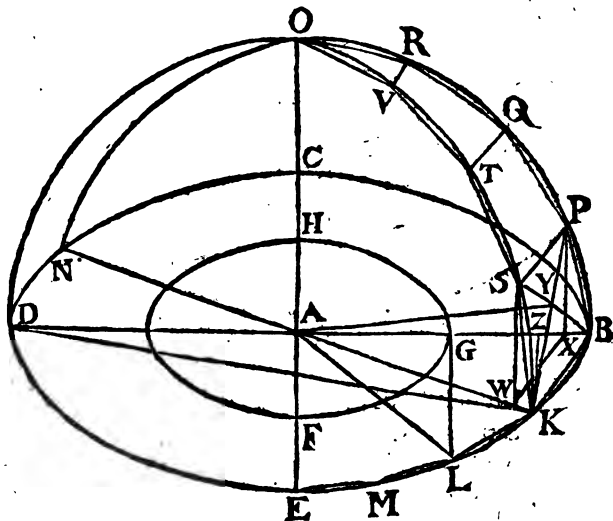
Coroll.

Ergo recta KG < KP.

PROP.

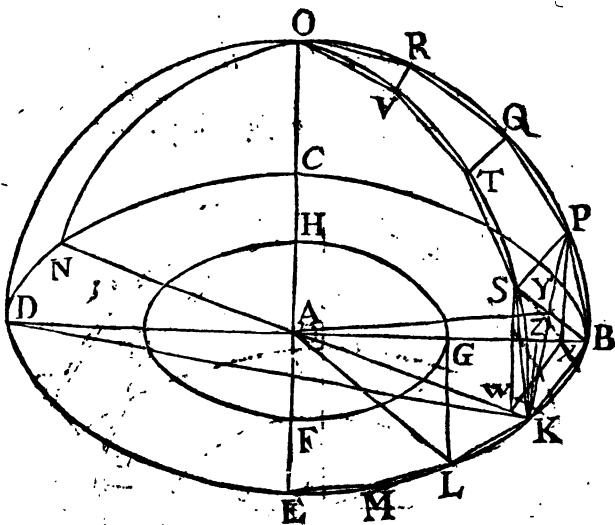
PROP. XVII. PROBL.

Duabus sphaeris circa idem centrum A consistentibus, in maiori solidum polyedrum describere, quod minoris sphaerae superficiem non tangat.



Secentur sphaerae plano aliquo per centrum. Quia ¹ semicirculi sphaeram generantis planum productum in superficie sphaerae circum ^{1. 14. def. 11.} efficit maximum, siue qui diametrum ^{& sequ.} sphaerae habet: sectiones erunt circuli maximi. ^{& 15. 3.} Sint illi BCDE, FGHI, & eorum diametri ad rectos angulos ducantur BD, CE. In maiori circulo BCDE polygonum aequalium & parium laterum ² describatur, non tangens ^{2. 16. 12.} minorem FGH. Sint in quadrante BE ea ³ latera

Aa 2



v. 12. 11.

§. 2. def. 11.
 s. 1. def. 3.

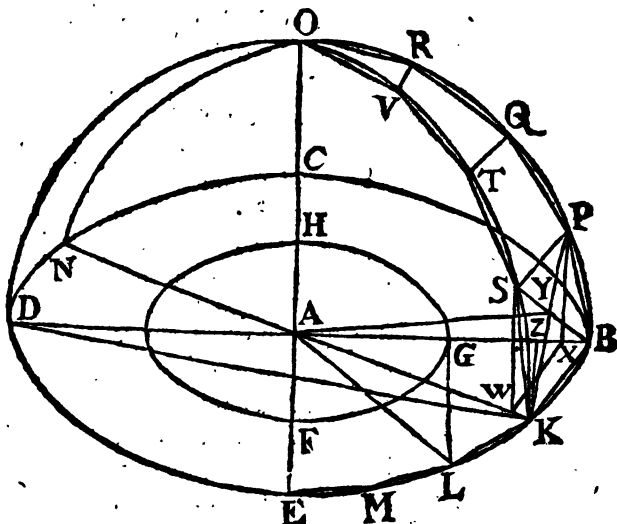
latera BK, KL, LM, ME, & luncta KA produ-
 catur ad N. Ex A in planum BCDE efigatur
 perpendicularis AO, superficier sphaerae ma-
 joris occurrens in O, & per AO ac vtram-
 que BD, KN ducantur plana, quae in super-
 ficie sphaerae efficient maximos circulos, quo-
 rum semisses sint DOB, NOK. Quia AO
 ipfis BD, KN ad rectos est: erunt OB, OK
 quadrantes circuli, & aequales, quia cir-
 culi aequales diametros BD, KN habent.
 Quot ergo latera polygoni sunt in quadrante
 BE, tot aptari possunt illis aequalia in quadrante
 BO, quae sint BP, PQ, QR, RO, & in quadrante
 KO, quae sint KS, ST, TV, VO. Iungantur
 SP, TQ, VR. Ex P, S in planum BCDE de-
 mit-

mittantur \perp perpendiculares PX, SW, quae τ . 11. 11.
 occurrent ϵ rectis BA, KA. Et quia BP, KS ϵ . 38. 11.
 sunt aequales partes aequalium circumloꝝ,
 anguli vero PXB, SWK ϵ recti: erit ϵ PX \equiv τ . 26. 1.
 SW, & BX \equiv KW, ideoque AX \equiv AW, & τ . 3. 2x. 1.
 XW ipsi KB \parallel parallelae. Sed quum aequa- ϕ . 6. 1.
 les PX, SW etiam parallelae ϕ sint: erunt τ . 33. 1.
 XW, PS parallelae τ & aequales. Ergo & PS, \downarrow . 9. 11.
 BK erunt parallelae \downarrow . 7. 11.
 Hinc quadrilaterum
 PS, KB est in vno plano. Idem similiter
 constat de quadrilateris QTSP, RVTQ. Sed
 & Δ ROV planum ϵ est. Ductis ergo a pun- α . 2. 11.
 ctis P, S, T, Q, R, V ad A rectis, constituetur
 figura solida polyedra inter quadrantes circ,
 BO, KO, ex pyramidibus composita, quarum
 vertex communis A, & bases plana BKSP,
 PSTQ, QTVR, VOR. In vnoquoque late-
 rum KL, LM, ME eadem quae in KB con-
 struantur, & etiam in reliquis tribus quadran-
 tibus, & in reliquo hemisphaerio. Sic fiet so-
 lidum polyedrum maiori sphaerae inscriptum,
 compositum ex pyramidibus, quarum vertex
 communis A. Dico huius solidi superficiem
 non tangere superficiem minoris sphaerae.

Ducatur enim in planum PSKB ex A per-
 pendicularis AY, & KY, BY iungantur. Et
 quoniam ob ang. AYB, AYK rectos ϵ , BYq +
 AYq \equiv ABq \equiv AKq \equiv KYq + AYq: β . 47. 1.
 erit BY \equiv KY. Similiter patet esse SY \equiv
 PY \equiv BY. Ergo PSKB est quadrilaterum in
 circulo γ centro Y. intervallo YB descripto. γ . 15. def. 1.
 Et quia BK \supset δ XW, ideoque \supset PS; BK δ . 2. sch. 4. 6.
 & 14. 5.

Aa 3

vero



vero = KS = PB: erit circumferentia huius
circuli, quam recta BK subtendit, quadrante
maior, hinc ang. KYB recto ² maior, & KBq
> 2 BYq. Ducatur a K ad BD perpendicu-
laris KZ, & iungatur DK. Quoniam AB <
AB + 2 AZ: erit DB < 2 DZ. Hinc quia
DB : 2 DZ = ² DB × BZ : 2 DZ × BZ =
BKq : 2 KZq: erit BKq < 2 KZq, & ergo KZq
> BYq. Sed KZq + AZq = AKq = BYq
+ AYq. Ergo AZ < AY, & a potiori
AG < AY. Ergo polyedri superficies non
tangit minoris sphaerae superficiem. Q. E. F.

Aliter.

Et brevius ostendemus esse $AG < AY$, excitato ex G in AB perpendicularo GL , & iuncta AL .

AL. Nam bisecta circ. BE, & huius semisse, & sic porro, relinquetur tandem circumferentia minor ea, quam recta ipsi GL aequalis in circulo BCE subtendit. Sit illa BK. Ergo recta BK < GL. Sed vt antea patet esse BK > BY. Ergo GL > BY. Sed GLq + AGq = ALq = ABq = BYq + AYq. Quare GA < AY. Q. E. D.

Corollar.

Si in quavis alia sphaera describatur solidum polyedrum praedicto polyedro in sphaera BCDEO simile: habebunt haec duo solida polyedra triplicatam rationem eius quam diametri sphaerarum habent. Diuisis enim solidis in pyramides numero aequales & eiusdem ordinis: erunt hae pyramides similes. Ergo pyr. BPSKA erit ad pyramidem eiusdem ordinis in altera sphaera in triplicata ratione ^λ eius λ. cor. 8. 11. quam latus homologum ad homologum habet, id est, quam habet semidiameter sphaerae A ad semidiametrum alterius sphaerae. Idem de quibusuis duabus pyramidibus in vtraque sphaera eiusdem ordinis intelligendum est. Sed ^μ vt vna pyramis μ. 12. § in sphaera A ad vnam in altera, ita solidum polyedrum in sphaera A ad solidum polyedrum in altera sphaera. Ergo solida polyedra sunt in triplicata ratione semidiametrorum, vel diametrorum. Q. E. D.

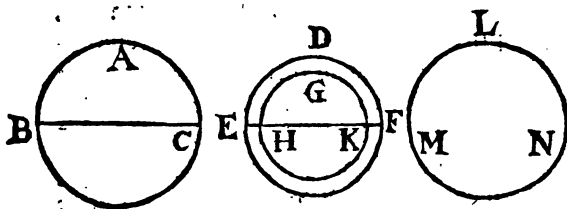
PROP. XVIII. THEOR.

Sphaerae ABC, DEF inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum BC, EF.

1. Si enim non: fit sph. ABC ad sphaeram GHK ipsa DEF minorem in triplicata ratione BC ad EF. In sph. DEF describatur solidum v. 17. 12.

Aa 4

polye-



polyedrum, quod non tangat minorem GHK, circa commune cum illa centrum constitutam, & in sph. ABC huic polyedro simile describitur, quod erit $\frac{1}{2}$ ad polyedrum in sph. DEF in triplicata ratione BC ad FE, ideoque in eadem ratione in qua sph. ABC ad sph. GHK. Igitur sph. GHK $>$ polyedro in sphaera DEF descripto, pars toto. Q. E. A.

2. Si ponas, sph. ABC ad sph. LMN ipsa DEF maiorem esse in triplicata ratione BC ad EF: erit sph. LMN: sph. ABC $= (EF: BC)^3$. Sed sph. LMN ad sph. ABC vt sph. DEF ad sphaeram * ipsa ABC minorem. Ergo sph. DEF erit ad sphaeram ipsa ABC minorem in triplicata ratione diametri EF ad diametrum BC. Q. F. N^r.

* Corollar.

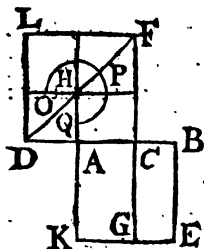
Hinc vt sphaera ad sphaeram, ita est polyedrum solidum in illa ad polyedrum in hac simile & similiter descriptum.

EV.

E V C L I D I S E L E M E N T O R V M L I B E R X I I I .

* * * * *

PROP. I. THEOR.



Si recta linea AB extrema ac media ratione secta fuerit: maior portio AC assumens dimidiam AD totius AB quintuplum potest eius, quod a dimidia AD totius sit, quadrati.

Describantur ex AB, DC quadrata AE, DF. Deinde in DF describatur figura, & producatu-
 ad G. Est ergo $CE = AB \times BC = ACq$ a. 3. def. & 17. 6.
 $= HF$. Iam quia $AK = AB = 2 AD = 2 AH$, & $AK : AH = AG : CH$: erit $AG = CH = CH + HL$, ideoque $AE =$ β. hyp. γ. 1. cor. 4. 2. δ. r. 6.
 gnomoni OPQ. Sed $AE = ABq = 4 ADq$ ε. 43. l. ζ. 2 ax. 1. η. sch. 4. 2.
 $= 4 DH$. Ergo gn. OPQ = 4 DH, & pro-
 inde DF , id est $CDq = 5 DH$ vel $5 ADq$.
 Q. E. D.

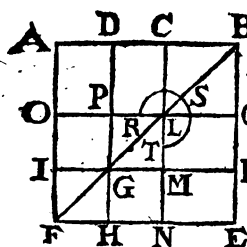
PROP. II. THEOR.

Si recta linea CD partis sui ipsius AD quintuplum possit, atque duplum AB dictae partis AD extrema ac media ratione secetur: maior portio est pars reliqua CA eius quae a principio rectae lineae CD.

Fig. prop. praec.

A a 5

De-



CD: erit $ON = ACq$

$= 4 CDq = 4 PM.$

Et quia $AB \times BC = 4 PM.$ p. 3. def. 6.

ACq , & $AB \times BC =$

CE : erit $CE = 4 PM.$

Rursum quoniam $AD =$

DC , & proinde $IG =$

GM : erit $PM = HI$, p. 34. 1.

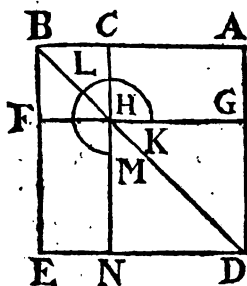
& $PG = GH$, vel $QK = KE$. Quare p. 1. cor. 4. 2.

$Pgr. ME = MQ = LD$, ideoque gnomon p. 36. 1.

$RST = CE = 4 PM$, ac ob id totum DK p. 43. 1.

id est $DBq = 5 CDq$. Q. E. D. u. 2. ax. 1.

PROP. IV. THEOR.



Si recta linea AB extrema ac media ratione secta fuerit: totius AB & minoris portionis BC utraque simul quadrata tripla sunt quadrati eius, quod a maiori fit portione AC.

Descripto enim ex AB quadrato AE, & completa figura: erit ut antea $AF = GN$. p. 3. def. 6.

Sed $AF = CE$, ideoque $AF + CE$ id est GN p. 43. 1.

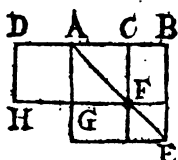
gnom. $KLM + CF = 2 AF = 2 GN$. Ergo

addito communi GN , erit $AE + CF = 3$

GN , id est, $ABq + BCq = 3 ACq$. Q. E. D.

PROP.

PROP. V. THEOR.



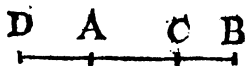
Si recta linea AB extrema ac media ratione secetur, adjiciaturque ipsi AD aequalis maiori portioni AC: erit tota linea BD extrema ac media ratione secta, & maior portio erit ea, quae a principio posita est, recta linea AB.

ψ. 3. def. 6.
α. sch. 48. l.

α. 17. 6.

Descritto enim ex AB quadrato AE, & completa figura: erit $CE = \psi CG$. Sed $CE = GE$, & $CG = \alpha GD$. Ergo $GD = GE$, & hinc $HB = AE$, id est $BD \times DA = AB^2$. Quare $BD : AB = AB : DA$, & $AB > AD$, quia $BD > AB$. Hinc patet ψ Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.



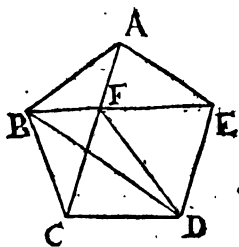
Si recta linea rationalis AB extrema ac media ratione secta fuerit: utraque portio AC, CB irrationalis est, quae apotome appellatur.

β. 1. 13.
γ. 9. def. 8.
6. 10.
δ. 9. 10.
ε. 74. 10.
ζ. 3. def. 6.
η. 98. 10.

Producatur CA, & sit $AD = \frac{1}{2} AB$. Ergo $CD^2 = \beta AD^2$. Hinc, quia AD est β, erit γ CD^2 β, ac ergo ipsa CD β. Sed δ CD non ε AD. Ergo CD, DA erunt β ε, ideoque AC apotome ε erit. Deinde quia $AB \times BC = \zeta AC^2$: AC^2 ad β AB applicatum latitudinem faciet BC, quae proinde η erit apotome prima. Q. E. D.

PROP.

PROP. VII. THEOR.



Si pentagoni aequilateri ABCDE tres anguli, siue deinceps siue non deinceps, inter se fuerint aequales: aequiangulum erit pentagonum.

1. Sint anguli deinceps A, B, C aequales. Iungantur AC, BE, FD. In

\triangle is BAE, ABC erit \angle BE = AC, & ang. AEB = ACB, & ang. ABE = BAC. Ergo BF = AF, & FE = FC. Sed praeterea ED = DC. Ergo ang. FED = FCD, ideoque ang. AED = BCD = A = B. Similiter demonstrabitur, ang. CDE = B = cuique reliquorum. Q. E. D.

2. Sit ang. A = C = D. Iungatur BD. Et quia AB = BC & AE = CD, & ang. A = C: erit ang. AEB = CDB, & BE = BD, ideoque ang. BED = BDE. Hinc totus AED = CDE = A = C. Idem de ang. B similiter ostendetur. Q. E. D.

PROP. VIII. THEOR.

Si pentagoni aequilateri & aequianguli AB, CDE duos, qui deinceps sunt, angulos A, B subtendant rectae lineae BE, AC: extrema ac media ratione se mutua secant, & minores ipsarum portiones EF, FC pentagoni lateri AE sunt aequales.

Descri-

v. 14. 4.

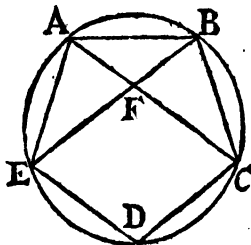
§. 4. 1.

e. 32. 1.

π. 33. 6.

g. 6. 1.

e. 5. 1.



Describatur ' circa
pentagonum circulus.

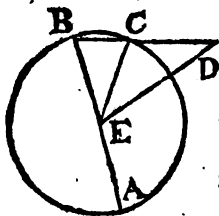
Primo in triangulis
AEB & ACB est $\frac{1}{2}$ BE =
AC, & ang. EBA =
CAB. Hinc ang. AFE
= 2 CAB = π CAB.

Igitur EF = $\frac{1}{2}$ AE.

Deinde quia ang. FAB

= FBA, = π AEB, & ang. B communis. Δ is
AFB, AEB: erunt Δ a ista aequiangula, & erit
EB: BA = BA: BF, id est ob AB = AE =
EF, EB: EF = EF: FB. Est vero EF > FB,
quia EB > EF. Ergo BE in F secatur extre-
ma ac media ratione, & maior portio EF ae-
qualis est lateri pentagoni AE. Idem simili-
ter de recta AC ostendemus. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.



Si latera hexagoni DC
& decagoni CB in eodem
circulo ACB descriptorum
componantur: erit tota re-
cta BD extrema ac media
ratione secta, & maior ip-
sius portio erit hexagoni
latus CD.

Sit centrum circuli E. Quia BC est latus
decagoni aequilateri: erit circumf. ACB = 5
BC, ergo AC = 4 CB. Hinc & ang. AEC π
= 4 BEC. Sed ang. AEC = π BCE + CBE
= 5 BCE; &, ob DC = π CE, est ang. BCE
= 2

π. 33. 6.

v. 32. 1.

φ. 5. 1.

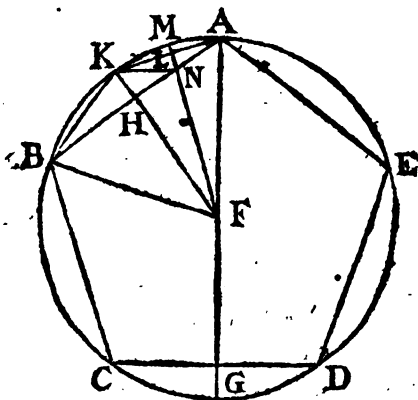
x. cor. 15. 4.

$\equiv 2 \text{ CDE}$: quare $\text{AEC} \equiv 4 \text{ CDE}$. Est ergo ang. $\text{BDE} \equiv \text{BEC}$. Sed ang. B est communis Δ is BED, BEC. Quare $\angle \text{BD} : \text{BE} \equiv \angle 4. 6.$
 $\text{BE} : \text{BC}$, hoc est $\text{BD} : \text{DC} \equiv \text{DC} : \text{CB}$. Est autem $\text{DC} > \text{CB}$, quia $\text{BD} > \text{DC}$. Ergo patet Q. E. D.

* Schol.

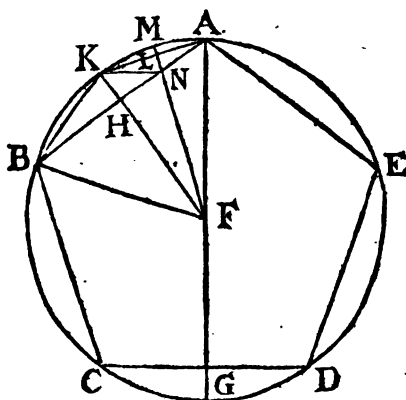
Et conuerſim, ſi qua recta BD extrema ac media ratione ſecetur: erit minor portio BC latus decagoni in eo circulo, in quo maior CD eſt latus hexagoni. Nam, eadem deſcripta figura, quia ang. $\text{AEC} \equiv 2 \text{ BCE}$, & ang. $\text{BCE} \equiv 2 \text{ CDE} \equiv 2 \text{ BEC}$ (per 6. 6): erit circumf. $\text{AC} \equiv 4 \text{ BC}$, ideoque recta BC latus decagoni.

PROP. X. THEOR.



Si in circulo ABCDE pentagonum æquilaterum describatur: latus pentagoni AB poteſt & hexagoni & decagoni latus in eodem circulo deſcriptorum.

Suma-

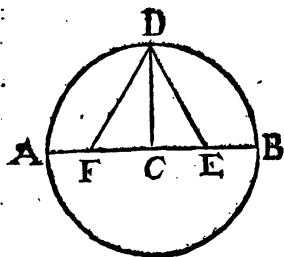


- Sumatur centrum circuli F, & ducatur diameter AFG, & iungatur FB. Ab F ad AB ducatur perpendicularis FHK, & iungantur AK, KB. Rursus ab F ad AK ducatur perpendicularis FNL, & iungatur KN. Igitur quia circ. ABCG = AEDG, & circ. ABC = AED: erit circ. CG = GD, ideoque CGD = 2 CG. Rursus quia BF = AF, & anguli ad H aequales sunt, erit^a ang. BFH = AFH, ideoque circumf. BK = KA, & AKB = 2 BK, & hinc AK erit latus decagoni. Similiter patet esse circ. BK = MK = 2 KM. Iam, quia CGD = AKB, erit^β circ. CG = BK = 2 KM. Sed circ. CB = AKB = 2 BK. Ergo^γ circ. BGG = 2 BKM, & ob id ang. BFG = 2 BFM. Sed ang. BFG = BAF + ABF = 2 BAF. Ergo^β ang. BAF = BFM. Quum igitur Δa BFA, BFN sint aequiangula: erit^a AB: BF = BF: BN, & proinde AB × BN

$BN =^9 BFq$. Rursus quia ang. ad L recti $9. 17. 6.$
 sunt, & $AL = LK$: erit 2 ang. $LAN = LKN.$ $^1. 3. 3.$
 Sed quia recta $AK = KB$, est ang. $LAN =$ $^2. 4. 1.$
 $^3 KBA$. Ergo ang. $KBA = AKN$. Quare
 in Δ is aequiangulis ANK , ABK erit $BA : AK$
 $=^1 KA : AN$, & hinc $AB \times AN =^9 AKq$.
 Ergo $ABq =^2 AB \times BN + AB \times AN =$ $^4. 2. 2.$
 $BFq + AKq$. Est autem BF latus hexagoni,
 & AK decagoni. Q. E. D. $^v. cor. 15. 4$

* Schol.

Hic praxin faciliorem trademus problematis
 31. 4: In dato circulo pentagonum aequilaterum &
 aequiangulum describere.



Super diametro AB
 ex centro C erigatur
 perpendicularis CD . Bi-
 secetur BC in E , & iun-
 gatur ED , cui capiatur
 aequalis EF . Iuncta
 FD erit latus pentago-
 ni in circulo ABD de-
 scribendi.

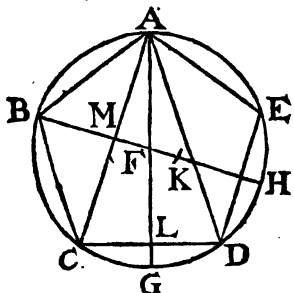
Nam quia (per 6. 2) $BF \times FC + CEq =$
 $EFq = EDq = CDq + CEq$: erit $BF \times FC =$
 $CDq = BCq$. Quum ergo sit $BF : BC = BC : CF$:
 erit BF extrema ac media ratione secta. Sed ma-
 ior portio BC est latus hexagoni in circulo ABD .
 Ergo CF est latus decagoni in eodem (per sch.
 praec.); & hinc $DF = \sqrt{(DCq + CFq)}$ latus
 pentagoni. Q. E. F.

Bb

PROP.

PROP. XI. THEOR.

Si in circulo ABCDE, ratiorem diametrum habente, pentagonum aequilaterum describatur: pentagoni latus AB est linea irrationalis, quae minor appellatur.



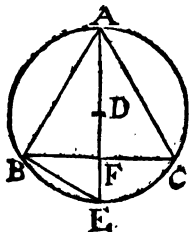
Sumatur enim circuli centrum F, & ducantur diametri AG, BH, & iungatur AC, & capiaturs $FK = \frac{1}{2} AF$, quae erit ρ , quia AF ρ . Sed & BF est rationa-

- lis. Ergo $\frac{1}{2} BK$ est ρ . Et quia circumf. ABG = AEG, & ABC = AED: erit circ. CG = GD, & ang. CAG = GAD, item ang. ACL = ADL. Ergo π anguli ad L sunt recti, & hinc $CL = LD$, & $CD = 2 CL$. Eadem ratione & anguli ad M recti sunt, & AC est $= 2 CM$. Quia igitur ΔALC , AFM aequiangula sunt: erit $LC : CA = MF : FA$, & $2 LC : CA = 2 MF : FA = MF : \frac{1}{2} FA$; ideoque $2 LC : \frac{1}{2} CA = MF : \frac{1}{4} FA$, id est $CD : CM = MF : FK$. Hinc componendo $DC + CM : CM = MK : KF$, & $(DC + CM)q : CMq = MKq : KFq$. Iam si AC extrema ac media ratione secetur, erit maior eius portio $\phi = CD$; ideoque erit $\pi (DC + CM)q = 5 CMq$. Hinc & $MKq = 5 KFq$; ideoque ψMKq est ρ , & $MK \rho$. Et quoniam $BF = 4 FK$: erit $BK = 5 FK$, & $BKq = 25 FKq$. Hinc $5 MKq = BKq$, & ob id ϕBK non

non \leq MK. Vtraque tamen p existente, erunt BK, KM p \in . Quare MB est apotome^a & ipsi congruens MK. Dico & MB esse^a. 74. 10. apotomen quartam. Sit enim $\sqrt{(BKq - KMq)} = N$. Et quia KF \leq FB, erit KB \leq β β . 16. 10. FB \leq BH rationali expositae. Deinde quia BKq : KMq $=$ 5 : 1, & conuertendo BKq : Nq $=$ 5 : 4 : erit^a N non \leq BK. Ergo γ MB γ . 4. def. erit apotome quarta. Hinc, quum sit ABq γ . 4. def. $=$ β MB \times BH, erit^a AB α quae vocatur γ . 4. def. tert. 10. & 31. 3. minor. Q. E. D. γ . 95. 10.

* Cor. Diameter circuli AG ex angulo A pentagoni regularis ducta & arcum CD a latere opposito subtensum, & latus ipsum oppositum CD ad angulos rectos bifecat.

PROP. XII. THEOR.



Si in circulo ABC triangulum aequilaterum ABC describatur: trianguli latus AB potentia triplum est eius DA quae ex circuli centro D.

Nam, producta AD in E, quia circumf. BEC est tertia pars circuli, & BE $=$ β EC: erit BE sexta pars β . 3. 22. 1. circuli, ideoque recta BE latus hexagoni $=$ γ . cor. 15. 4. DA. Et quia ABq + BEq $=$ β AEq $=$ γ . 31. 3. DAq: erit ABq $=$ β DAq. Q. E. D.

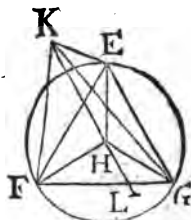
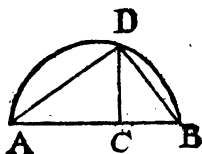
* Schol.

1. AEq : ABq $=$ 4 : 3.
2. ABq : AFq $=$ 4 : 3. Nam^a AEq : ABq $=$ β . cor. 8. 6. & 22. 6.
3. DF $=$ FE. Nam Δ . EBD aequilaterum est, γ . 4. 1. & ADF ad BC perpendicularis^a. Ergo^a DF $=$ FE. γ . cor. 3. 3.
4. Hinc AF $=$ β FD.

B b 2

PROP.

PROP. XIII. PROBL.



Pyramidem + constituere, & sp̄aera comprehendere data; atque etiam demonstrare, quod sp̄aerae diameter AB est potentia sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

n. 9. 6.

n. 2. 4.

Secetur AB in C^u ita, ut $AC = 2 CB$. Super AB describatur semicirculus ADB, & ex C ad AB ducatur perpendicularis CD, & iungatur AD. Fiat circulus EFG centro H intervallo CD, & in eo describatur[†] triangulum aequilaterum EFG. Iungantur HE, HF, HG. Ex H plano huius circuli excutetur ad rectos HK, quae fiat $= AC$, & iungantur KE, KF, KG. EFGK erit tetraedrum desideratum.

ξ. 3. def. 12.

o. 4. 1.

π. lemma
sequens.

g. constr.

σ. 12. 13.

1. Etenim quia ang. KHE est $\frac{1}{2}$ rectus, ideoque $= ACD$, & $KH = AC$, $HE = CD$: erit $\circ KE = AD$. Similiter $KF = AD = KG$. Et quoniam $AB = 3 BC$, & $AB:BC = \pi ADq$: DCq: erit $ADq = 3 DCq = \epsilon$; $HEq = \sigma EFq$. Hinc $EF = AD$; & ergo $FG = GE = EF = AD = KE = KF = KG$. Sunt ergo Δa EFG, EKG, FKG, EKF aequilatera & τ. 26. def. 11. aequalia. Ergo EFGK est σ tetraedrum.

2. Pro-

[†] Vel potius *tetraedrum*; quod & in sequentibus intellige.

2. Producat^{ur} KH in L ut sit HL = CB.
 Quia \vee AC : CD = CD : CB : erit KH : HE α . cor. 8. 6.
 = EH : HL. Ergo semicirculus super KL
 descriptus ϕ transibit per E, &, manente KL, ϕ . sch. 13. 6.
 conuersus transibit etiam per G & F, quod eo-
 dem modo ostendetur. Ergo \propto sphaera data, \propto . 14. def. 11.
 cuius diameter est AB = KL, comprehendet
 tetraedrum EFGK. Q. E. F.

3. Quia AB : BC = ϵ 3 : 1 : erit conuerten-
 do AB : AC = 3 : 2. Est vero BA : AD \vee =
 AD : AC, & hinc AB : AC = \vee ABq : ADq. ψ . 2. cor.
 Ergo ABq = $\frac{3}{2}$ ADq = $\frac{3}{2}$ KEq. Q. E. D. α . 20. 6.

L E M M A.

Demonstrandum autem est, esse AB : BC =
ADq : DCq.

Nam quia BA : AD = \vee AD : AC : erit BA
 \times AC = ADq. Et quia AC : CD = \vee CD :
 BC : erit AC \times CB = CDq. Hinc AB : BC
 = \vee AB \times AC : AC \times BC = ADq : CDq. α . 1. 6.
 Q. E. D.

* *Coroll.* Diameter sphaerae KL est sesqui-
 altera altitudinis KH tetraedri inscripti.

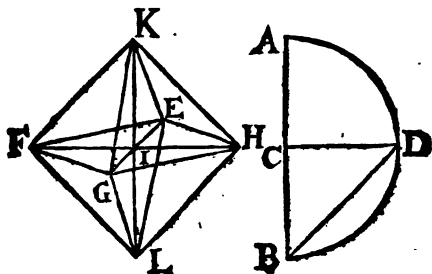
* *Schol.* Latus tetraedri FG potentia est sesqui-
 alterum altitudinis tetraedri HK. Nam FGq :
 HKq = ADq : ACq = ABq : ADq = 3 : 2.

PROP. XIV. PROBL.

Octaedrum constituere, & eadem sphaera
comprehendere, qua & pyramidem; atque de-
monstrare, sphaerae diametrum AB potentia
duplam esse lateris ipsius octaedri.

B b 3

Data



Data diameter AB bifecetur in C, & describatur super AB semicirculus, & ex C in AB ducatur perpendicularis CD, & DB iungatur. Fiat quadratum EFGH, cuius latus = BD. Ex puncto I intersectionis diametrorum EG, FH planq EFGH ad rectos ducatur KIL, & fiat KI = IL = IE, & iungantur KE, KF, KG, KH, LE, LF, LG, LH.

2. 2. 4.
2. 17. 1.
2. 3. def. 11.

1. Nam quia $\angle EIH = \angle IHE$ & ang. EIH rectus: erit $\angle EHQ = 2 \angle ELQ$. Et quum KI = IE, ac ang. KIE rectus: erit & $\angle KEQ = 2 \angle ELQ$. Hinc $EH = KE$. Similiter $KH = HE$. Ergo $\triangle EKH$ est aequilaterum. Eodem modo ostendemus, reliqua triangula, quorum bases sunt EF, FG, GH, HE & vertices K, L, esse aequilatera. Et patet omnia haec \triangle inter se aequalia esse. Ergo KEFGHL est octaedrum.

2. 2. sch. 8. 1.
2. 27. def. 11.

Q. E. F.

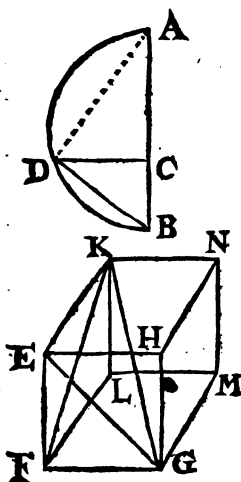
2. 3. Quia KI = IE = IL: semicirculus super KL descriptus transibit per E. Et manente KL conuersus hic semicirculus transibit etiam per F, G, H. Ergo sphaera diametri KL comprehendet hoc octaedrum. Sed & data sphaera. Nam quia $KE = EL$, & ang. in semi-

semicirculo KEL ζ rectus est, erit $KLq = 2 \cdot 31. 3.$
 $2 KEq$. Est vero $AB = 2 BC$, & $AB : BC = cor. 8.$
 $= ABq : BDq$. Ergo $ABq = 2 BDq = 2$
 $KEq = KLq$. Hinc diametro datae AB ae-
 qualis est ipsa KL , ideoque octaedrum sphae-
 ra data comprehenditur; & AB potentia du-
 pla est lateris octaedri KE . Q. E. F. & D. 20. 6.

* *Coroll.* Octaedrum constat ex duabus pyrami-
 dibus aequalibus, basin quadratam habentibus, &
 altitudinem aequalem semidiametro sphaerae cir-
 cumscriptae.

PROP. XV. PROBL.

*Cubum constituere, &
 eadem sphaera comprehen-
 dere, qua & priores; at-
 que demonstrare, sphaerae
 diametrum AB lateris po-
 tentia triplam esse.*



Ex AB auferatur pars
 tertia BC , & super AB
 descripto semicirculo, du-
 catur ad AB perpendicularis
 CD , & iungatur DB .

Fiat quadratum $EFGH$
 habens latus $= DB$. Ex
 punctis E, F, G, H plano
 $EFGH$ ad rectos $^\circ$ exci- 3. 11. 11.
 tentur EK, FL, GM, HN , quarum quaeque fiat
 $= EF$. Iungantur KL, LM, MN, KN .

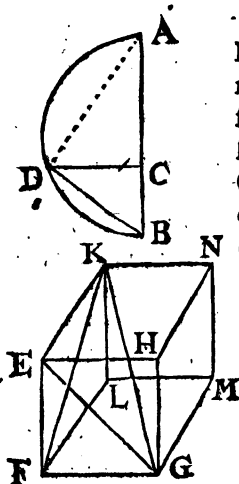
1. Quidem ex constructione fatiis patet so-
 lidum genitum esse ' cubum. Q. E. F. 2. 25. def. 11.

Bb 4

2. 3.

κ. 3. def. 11.
λ. 1ch. 13. 6.
μ. constr.

ν. 4. 11.



ξ. 47. 1.

ο. cor. 8. &
20. 6.

π. 13. 13.

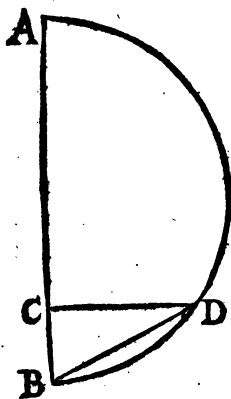
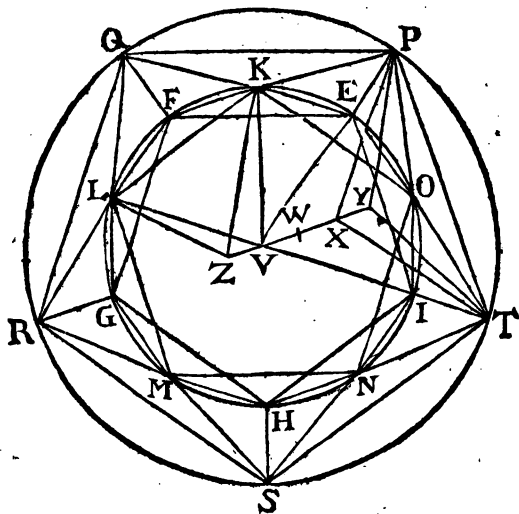
2: 3. Iungantur EG, KF, KG. Et quia ang. KEG rectus * est : semicirculus super KG transibit ^λ per E. Rursus quia * anguli GFE, GFL recti sunt, ideoque GF plano EL recta ^ν est, & hinc * ang. GFK rectus : alius semicirculus super KG transibit ^λ per F. Idem de reliquis punctis H, N, M, L ostendetur. Quare semicirculus super KG, manente KG, conuersus faciet sphaeram, quae cubum EM comprehendet. Dico autem, diametrum KG = AB. Nam quia EGq = ^ξ 2 EFq = 2 EKq : & KGq ^ξ = EGq + EKq : erit KGq = 3 EKq = ^μ 3 BDq. Sed quum sit AB = 3 BC, & AB : BC = ^ο ABq : BDq : erit ABq = 3 BDq = KGq. Ergo KG = AB. Itaque cubus factus est, quem data sphaera comprehendit, & diameter AB potentia tripla est lateris eius FG. Q. E. F & D.

* Schol. Quia AD erat π latus tetraedri sphaerae datae inscripti : patet diametrum sphaerae AB posse latus tetraedri & cubi in eadem inscriptorum.

PROP. XVI. PROBL.

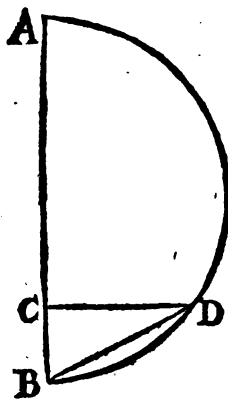
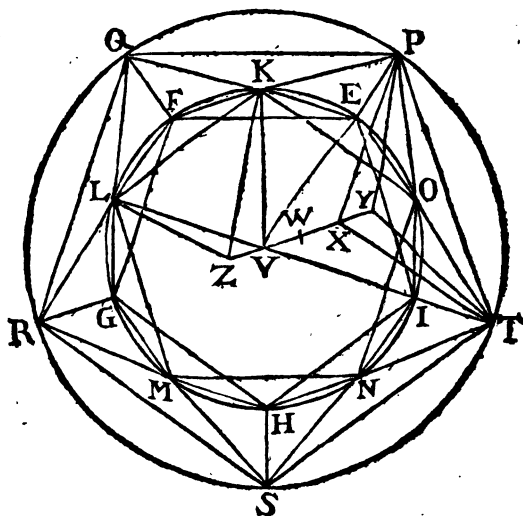
Icosaedrum constituere, & eadem sphaera comprehendere, quae & praedictas figuras; atque

que etiam demonstrare, icosaedri latus irrationalem esse lineam, quae minor appellatur.



1. A datae sphaerae diametro AB abscindatur pars quinta BC, & super AB descripto semicirculo, ducatur ad AB perpendicularis CD, & BD iungatur, quo intervallo describatur circulus EFGHI. Huic inscribatur pentagonum aequilaterum & æquiangulum EFGHI. Circumferentiae EF, FG, GH, HI, IE biscentur in K, L, M, N, O, & iungantur KF, FL, LG, GM, MH, HN,

B b 5



HN, NI, IO, OE, EK, item
 KL, LM, MN, NO, OK.
 Erit ergo KLMNO pen-
 tagonum aequilaterum &
 aequiangulum, & EO de-
 cagoni latus. A punctis
 E, F, G, H, I ipsi circuli
 plano ad rectos erigantur
 EP, FQ, GR, HS, IT, semi-
 diametro VK fingillatim
 aequales, & iungantur PQ,
 QR, RS, ST, TP, PK, KQ,
 QL, LR, RM, MS, SN,
 NT, TO, OP. Iam quia EP, IT parallelae
 sunt, erit $PT = EI$, & hinc PT erit latus
 pentagoni aequilateri in circulo QRSTP ipsi
 EFGHI aequali. Idem de reliquis PQ, QR,
 RS,

6. II.
 33. I.

2. Quia

rum icosaedri, & ergo hoc icosaedrum comprehensum iri sphaera diametri ZY. Et quoniam, bisecta VX in W, $WYq = 5 WXq$; $\alpha. 3. \& 9. 13.$
 ZY vero $= 2 WY$, ac $VX = 2 WX$: erit $\beta. 15. 5.$
 $ZYq = 5 VXq$. Est autem $AB = 5 BC$, &
 $ABq : BDq = 7 AB : BC$. Ergo quia $ABq 7. cor. 8. \&$
 $= 5 BDq = 9 5 VXq = ZYq$: sphaera diametri ZY icosaedrum comprehendens erit datae sphaerae aequalis. Q. E. F. $20. 6.$

3. Denique quia diameter data AB est ρ , & $ABq = 5 BDq$: erit δ & BD ideoque tota $\delta. 6. def. 10.$
 diameter circuli EFGHI rationalis. Hinc quum latus pentagoni KL sit ϵ minor; & eadem $\epsilon. 11. 13.$
 KL sit quoque latus icosaedri: patet latus icosaedri esse irrationalem quae minor vocatur. Q. E. D.

Corollar.

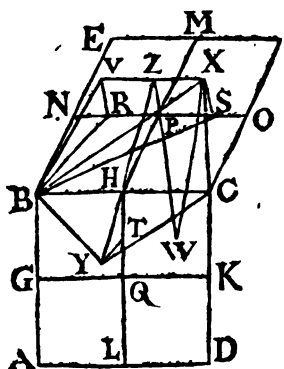
Sphaerae diameter potest quintuplum eius quae ex centro circuli quinque icosaedri latera ambientis. Et diameter sphaerae icosaedro circumscriptae composita est ex latere hexagoni & duplo latere decagoni, quae in eodem circulo describuntur.

PROP. XVII. PROBL.

Dodecaedrum constituere, & eadem sphaera comprehendere qua & praedictas figuras; atque etiam demonstrare, dodecaedri latus esse irrationalem, quae apotome appellatur.

1. Exponentur praedicti cubi ζ duo plana $\zeta. 15. 13.$
 ABCD, BCFE, quae sibi inuicem recta sunt, & eorum singula latera bisecentur, & iungantur
 tur

1. 30. 6.



tur GK, HL, HM, NO. Rectae NP, PO, HQ secantur extrema & media ratione in R, S, T punctis, in quibus ad plana cubi & ad exteriores eius partes excitentur perpendiculares RV, SX, TY, quae fiant aequales ipsis RP, PS, QT.

2. 4. 13.

1. 47. 1.

1. 7. 14.

2. 33. 1.

Iungantur VB, BY, YG, CX, VX, quae terminabunt pentagonum dodecaedri. Nam, iuncta RB, quia $PNq + NRq = 3 RPq$, & $BN = PN$, ac $RP = RV$: est $BRq = BNq + NRq = 3 RVq$, ideoque $BVq = BRq + RVq = 4 RVq$. Hinc $BV = 2 RV$. Sed quia $PN = PO$, ac ob id $RP = PS$: est $VX = RS = 2 PR = 2 RV$. Ergo $BV = VX$. Similiter BY, YC, & CX ipsis BV, VX aequales ostendentur. Sunt autem hae quinque rectae in vno plano. Nam ipsi RV vel SX ducatur parallela PZ ad exteriores cubi partes,

1. 3. def. 6.

& iungantur ZH, HY. Et quia $HQ : QT = QT : TH$, & $HQ = HP$, ac $TY = QT = PZ$; est $HP : PZ = YT : TH$. Sed HP, YT, eidem plano BD ad rectos insistentes, sunt parallelae. Ergo ZHY est vna recta, & proinde in vno plano. Pentagonum ergo est BYCXV, & aequilaterum. Dico etiam aequiangulum esse. Iungantur enim BX, BS. Quoniam NP secta est in R extrema ac media ratione,

1. 6. 11.

1. 32. 6.

1. 1. 11.

1. 2. & 7. 11.

tionem, & $SP = PR$: erit $NSq + SPq = 3 PNq$. p. 5. 13. & 4. 13.
 Hinc $NSq + SXq = 3 NBq$, & $NSq + SXq + BNq = 4 NBq$, id est $SBq + SXq = BXq = 4 NBq$. Ergo $BX = 2 NB = BC$.
 Quare in Δ is BVX , BYC erit \angle ang. $BVX = BYC$. p. 8. 1.
 Similiter ostendetur ang. $VXC = BYC$.
 Ergo pentagonum $BYCXV$ est \angle aequiangulum. p. 7. 13.
 Si igitur ita ad vnumquodque duodecim laterum cubi eadem constuantur, quae hic ad latus BC : figura solida constituetur, duodecim pentagonis aequilateris & aequiangularis & aequalibus contenta. Q. E. F.

2. Producatur ZP intra cubum. Occurret ergo diametro cubi, & ambae se bifecabunt, quod fiat in W . Est ergo W centrum \circ sphaerae cubum comprehendens, & dupla $PW = \phi$ lateri cubi, ideoque $PW = PN$. Et quia $PZ = PS$, erit $ZW = NS$. Iam quum praeterea $ZX = PS$, & $NSq + SPq = 3 PNq$: erit $3 PNq = ZWq + ZXq = XWq$. p. 39. 11. v. 15. 13. p. 34. 1. p. 47. 1.
 Sed semidiameter sphaerae cubum comprehendens potest etiam \circ triplum dimidii lateris cubi PN . Ergo XW est semidiametro sphaerae cubo circumscriptae aequalis. Quare quia W est centrum: erit X in superficie sphaerae. Similiter vertex cuiuslibet reliquorum angulorum dodecaedri in superficie sphaerae esse demonstratur. Ergo dodecaedrum sphaera comprehensum est data. Q. E. F.

3. Quoniam $NP : PR = PR : RN$, ideoque $NO : RS = RS : 2 RN = RS : RN + SO$; A. 3. def. 6. x. 15. 5.
 NO autem $> RS$, ideoque $RS > NR + SO$: erit \wedge rectae NO extrema ac media ratione se-

ctae

ψ. 6. 13.

ctae maior portio ipsa $RS = VX$. Et quia sphaerae diameter, quae ψ potest triplum ipsius NO , est ρ : erit & $NO \rho$; ergo ψVX apotome. Q. E. D.

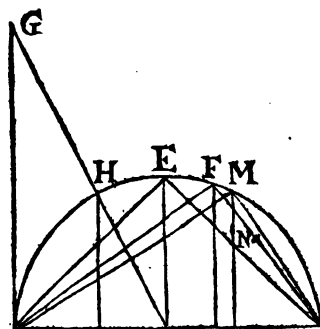
1. *Coroll.* Ergo latere cubi extrema ac media fractione secto, eius portio maior est dodecaedri latus.

* 2. *Coroll.* Liquet etiam, rectam subtendentem angulum pentagoni in dodecaedro esse latus cubi in eadem sphaera inscripti.

PROP. XVIII. PROBL.

Latera quinque figurarum expondere, & inter se comparare.

α. 9. 6.



semicirculus AEB, & in AB perpendiculares ducantur CE, DF, & AF, FB iungantur. Et quia $AB = 3 BD$: est α $AB = \frac{3}{2} AD$. Hinc quia $AB: AD = \beta$ $ABq: AFq$: est $ABq = \frac{3}{2} AFq$. Ergo AF est γ latus tetraedri.

α. cor. 19. 4.

β. cor. 8. &

30. 6.

γ. 13. 13.

δ. 15. 13.

ε. 14. 13.

2. Quia $ABq: BFq = \beta AB: BD = 3:1$: BF est latus cubi δ .

3. Iunctis AE, EB, est $ABq: BEq = \beta AB: BC = 2:1$. Ergo BE est latus octaedri ϵ .

4. In AB ducatur perpendicularis AG $= AB$. Iuncta GC, a puncto H ducatur in AB per-

perpendicularis HK. Iam quia $HK:KC = \frac{2}{3}$ 2. 4. 6.
 $GA:AC = 2:1$: erit $HKq = 4 KCq$, ideo-
 que $5 KCq = CHq = CBq$. Et quoniam
 $AB = 2 BC$, & $AD = 2 DB$: erit $DB'' = 2 + 5. 5$,
 CD , ideoque $CB = 3 CD$, & $CBq = 9 CDq$.
 Ergo $KC > CD$. Fac $CL = KC$, & in AB
 duc perpendicularem LM, iunge MB. Quia
 $CBq = 5 KCq$; est $^9 ABq = 5 KLq$. Ergo $^9. 15. 5$.
 KL est latus hexagoni in circulo quinque $^1. cor. 16. 13$,
 icosaedri latera ambientis, ideoque $AK =$
 $LB =$ lateri decagoni in eodem circulo. Sed
 $ML = ^* HK = 2 KC = KL =$ lateri hexa- $^2. 14. 3$.
 goni. Ergo MB est A latus pentagoni in eo- $^A. 10. 13$.
 dem circulo, ideoque latus M icosaedri. $^M. 16. 13$.

5. Secetur BF extrema ac media ratione:
 erit maior eius portio BN latus dodecaedri. $^v. 1. cor. 17. 13$.

6. Ex his liquet, latera tetraedri, octaedri
 & cubi esse ρ ϵ diametro AB sphaerae. Nam
 quarum partium 6 est ABq, earum 4 est AFq,
 trium BEq, & duarum BFq. Ergo $^2 AFq = 5. 22. 5$.
 $^3 BEq = 2 BFq$, & $BEq = \frac{2}{3} BFq$. Icosae-
 dri vero & dodecaedri latera nec inter se nec
 ad praedictarum figurarum latera sunt in ra-
 tionibus rationalibus: quia illius latus M est
 minor, huius apotome. $^6. 17. 13$.

7. Dico MB icosaedri latus maius esse latere
 dodecaedri BN. Nam $^B FBq:BDq = AB$: $^B. cor. 8. \&$
 $BD = 3:1$. Sed $ADq = 4 BDq$. Ergo $^20. 6$.
 $AD > FB$, ideoque $AL > FB$. Iam AL se-
 cta est extrema ac media ratione 7 , & maior $^8. 9. 13$.
 eius portio est KL; hinc quia & FB extrema ac
 media ratione secta est, & eius maior portio

Cc

BN

6. 3. def. 6. BN est : erit KL ϵ > BN. Ergo ML = KL
 vel 7. 14. > BN, ideoque ϵ MB > BN. Q. E. F.
 6. 19. 1.

Schol.

Dico praeter iam dictas quinque figuras non constitui aliam figuram †, quae sub figuris aequilateris & aequiangularis, inter se aequalibus, contineatur.

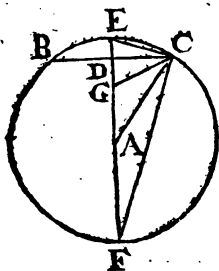
6. 11. def. 11. Ex duobus enim angulis planis ϵ non constituitur angulus solidus. Ex tribus autem triangulis aequilateris & aequalibus constituitur angulus tetraedri, ex quatuor octaedri, ex quinque icosaedri: ex sex autem pluribus nullus constituetur τ , quia sex anguli Δ aequilateri = ν 4 Rectis. Porro sub tribus quadratis continetur angulus cubi. Sub quatuor autem pluribus τ nullus angulus solidus contineri potest. Sub tribus pentagonis aequilateris & aequiangularis ac aequalibus continetur angulus dodecaedri. Sub quatuor autem pluribus nullus comprehenderetur τ angulus solidus: quia eorum summa ϕ > 4 rectis. Ob eandem rationem ex aliis figuris polygonis aequilateris & aequiangularis nullus solidus angulus constitui potest. Ergo nec fieri potest figura solida ex figuris planis aequilateris & aequiangularis praeter quinque dictas. Q. E. D.

† Talem autem intelligit figuram, cuius singuli solidi anguli sub aequae multis planis angulis continentur.

E V C L I D I S E L E M E N T O R V M

LIBER XIV. †

PROP. I. THEOR.



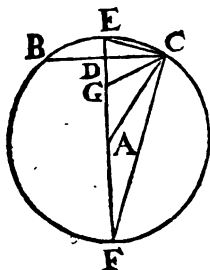
Quae a centro A circumferentiae alicuius ad latus BC pentagoni aequilateri in eodem circulo descripti perpendicularis ducitur AD, dimidia est utriusque & eius AC quae ex centro, & lateris decagoni in eodem circulo descripti.

Nam producat DA in F & E; fiat $DG = ED$, & iungantur CE, GC. Iam quia tota circumferentia circuli $= 5$ BEC: erit dimidia FCE $= 5$ GE, quae dimidia est $=$ ipsius BEC. Hinc quia FC $= 4$ GE, erit β ang. FAC $= 4$ DAC. Sed FAC $= 7$ DEC. Ergo 2 DAC $=$ DEC $=$ DGC. Quare AG $=$ GC $=$ CE, ideoque AD $=$ CE + ED, & 2 AD $=$ CE + AE, id est, AD $= \frac{1}{2}$ CE + $\frac{1}{2}$ AC. Est autem CE latus decagoni. Q. E. D.

L E M M A.

Si in circulo pentagonum aequilaterum describatur: quadratum quod fit ex latere BC
Cc 2 pen-

† Vel verius Hypsicles Alexandrini de quinque corporibus liber prior.



pentagoni, una cum quadrato quod fit ex recta, quae duobus pentagoni lateribus subtenditur, quintuplum erit quadrati eius, quae est ex circuli centro A.

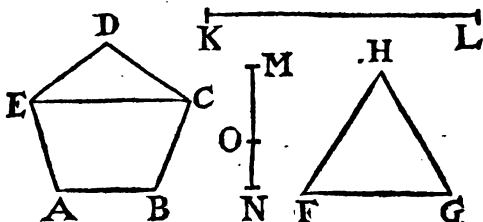
Ex centro circuli A ducatur in BC perpendicularis FADE, & iungatur CE,

quae erit $\frac{1}{2}$ latus decagoni, item CF, quae duo pentagoni latera subtendet. Et quia $FE = 2 AE$, erit $4 AEq = FEq = ECq + CFq$. Ergo $5 AEq = AEq + ECq + CFq = BCq + CFq$. Q. E. D.

2. 3. & 30. 3.
7. 31. 3.
9. 10. 13.

PROP. II. THEOR.

Idem circulus comprehendit dodecaedri pentagonum ABCDE & icosaedri triangulum FGH in eadem sphaera descriptorum.

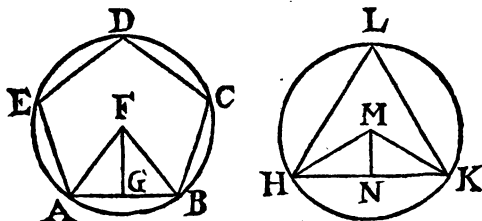


Sit sphaerae diameter KL. Iungatur EC, & exponatur recta MN talis, vt $KLq = 5 MNq$. Ergo $5 MN$ erit quae ex centro circuli, per quem icosaedrum describitur. Secetur MN extrema & media ratione, & segmentum maius

1. cor. 6. 10.
2. cor. 16. 13.

ius sit MO, quae ergo erit \wedge latus decagoni λ . 5. & sch. in eodem circulo. Iam quia $5\text{ MNq} = \text{KLq}$ 9. 13. $= 3\text{ CEq}$; & $3\text{ CEq} : 5\text{ MNq} = 3\text{ ABq} : 5$ 2. cor. 17. & 15. 13. MOq: erit $3\text{ ABq} = 5\text{ MOq}$. Sed quia FG v. 8. 13. & est $\frac{1}{2}$ latus pentagoni in praedicto circulo: erit 7. 14. $5\text{ FGq} = 5\text{ MNq} + 5\text{ MOq} = 3\text{ CEq} + 3$ 16. 13. $\text{ABq} = 15$ quadratis eius quae est ex centro circuli circa ABCDE circumscripti. Atqui 5 FGq 10. 13. $= 15$ quadratis eius quae est ex centro circuli circa FGH descripti. Ergo circuli circa ABCDE, & FGH circumscripti aequales sunt. lemma praec. 9. 12. 13. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.

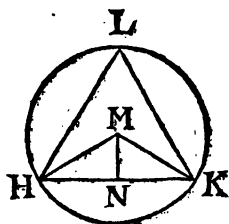
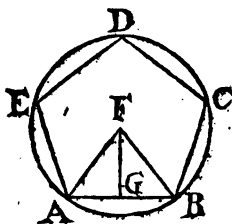


Si fuerit pentagonum aequilaterum & aequiangulum ABCDE, & circa ipsum circulus; a centro F autem ad unum latus AB perpendicularis FG ducta fuerit: quod tricies sub uno latere AB & perpendiculari FG continetur superficiei dodecaedri est aequale. Item

Si fuerit triangulum aequilaterum HKL, & circa ipsum circulus, cuius centrum M, & ab eo perpendicularis MN: quod tricies sub HK, MN continetur superficiei icosaedri aequale est.

Cc 3

I. lun-



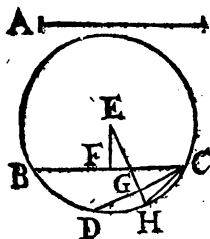
1. Iungantur AF, FB. Quia $5 AB \times FG = 10 \triangle AFB = 2$ pentagonis ABCDE: erit $30 AB \times FG = 12 ABCDE =$ superficiei dodecaedri.

2. Iungantur HM, MK. Quia $3 HK \times MN = 6 \triangle HMK = 2 \triangle HLK$: erit $30 HK \times MN = 20 \triangle HKL =$ superficiei Ico-
saedri. Q. E. D.

Coroll.

Ergo superficies dodecaedri est ad superficiem icosaedri in eadem sphaera, ut rectangulum sub latere pentagoni & perpendiculari ex centro circuli circumscripti ad illud ducta ad rectangulum sub latere trianguli & perpendiculari ex centro circuli circa triangulum descripti.

PROP. IV. THEOR.

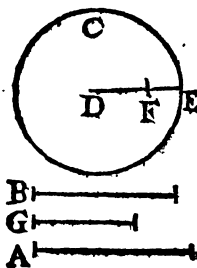


Ut dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita est latus cubi A ad icosaedri latus BC.

Circulo BCD qui icosaedri triangulum, ideoque & dodecaedri pentagonum, comprehendit, inscribatur pentagoni latus CD, & trianguli CB. Ex centro

centro E ad BC, CD ducantur perpendiculares EF, EG. Producat EG in H, & iungatur CH, quae erit latus decagoni. Hinc si EH + HC extrema ac media ratione secetur: erit EH maior portio. Sed $EG = \frac{1}{2} EH + \frac{1}{2} HC$, & $EF = \frac{1}{2} EH$. Ergo duplae ipsius EG extrema ac media ratione sectae maior portio erit EF. Sed ipsius A extrema & media ratione sectae maior portio est CD. Quare $A : CD = EG : EF$; ideoque $A \times EF = CD \times EG$. Est ergo $A : BC = A \times EF : BC \times EF = CD \times EG : BC \times EF =$ do-
 decaedri superficies ad icosaedri superficiem.
 Q. E. D.

PROP. V. THEOR.



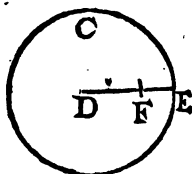
Qualibet recta linea extrema ac media ratione secta, quam rationem habet ea, quae potest quadratum totius & quadratum maioris portionis, ad eam, quae potest quadratum totius & quadratum minoris portionis, eandem habet cum bilatus A ad latus icosaedri B.

Sit enim circulus C, is, qui capit icosaedri triangulum & dodecaedri pentagonum in eadem sphaera descriptorum. Ex eius centro D, ducatur utlibet recta DE, quae extrema & media ratione secetur, ut maior eius portio sit FD. Sit G latus dodecaedri, quae erit maior portio rectae A extrema mediaque ratione

7. 12. 13.

2. 4. 13.

3. 7. 14.



B

G

A

2. sch. 9. &

5. 13.

7. 10. 13.

dodecaedri in circulo C; & $\frac{1}{2}$ DF latus dodecaedri in eodem: erit $Gq = \frac{1}{2} DEq + DFq$. Quare $A : B = \sqrt{(DEq + DFq)} : \sqrt{(DEq + EFq)}$, & ergo $\frac{1}{2}$, qualibet recta extrema & media ratione secta, quam rationem habet ea quae potest &c. Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.

Vt latus cubi ad icosaedri latus, ita est dodecaedri solidum ad solidum icosaedri.

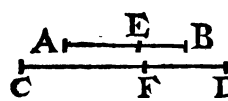
5. 2. 14.

Quia enim idem circulus pentagonum dodecaedri & triangulum icosaedri⁹ in eadem sphaera capit: si e centro sphaerae in planum huius circuli intelligatur ducta perpendicularis; erunt pyramides, quae pentagonum & triangulum bases habent, aequae altae. Vt ergo pentagonum ad triangulum, ita est $\frac{1}{2}$ dodecaedri pyramis ad pyramidem icosaedri; ac proinde vt 12 pentagona ad 20 triangula, id est vt superficies dodecaedri ad superficiem icosaedri, ita dodecaedrum est ad icosaedrum. Nam quia perpendiculares ex centro sphaerae in circulos in sphaera aequales ductae, in centra eorum circulorum incidunt, & ergo aequales sunt:

7. 6. 12.

sunt: dodecaedrum in 12, icosaedrum in 20
 aequales ' pyramides, in centro sphaerae ver-
 tices habentes, diuiditur. Est ergo ^{u.} 4. 14.
 cubi ad icosaedri latus, ita dodecaedrum ad
 icosaedrum. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.

Si duae rectae lineae

 AB, CD extrema ac me-
 dia ratione sectae fuerint:
 erunt maiores portiones AE, CF ut totae AB,
 CD.

Nam quia ^λ AEq = AB × BE, & CFq = ^λ 17. 6.
 CD × DF: erit 4 AB × BE: AEq = 4 CD
 × DF: CFq, & componendo ^μ (AB + BE) q: ^μ 8. 2.
 AEq = (CD + DF) q: CFq. Quare ' AB ^{v.} 22. 6.
 + BE: AE = CD + DF: CF, & compo-
 nendo 2 AB: AE = 2 CD: CF, & alterne AB:
 CD = AE: CF. Q. E. D.

Corollar.

Dodecaedrum & icosaedrum in eadem sphaera
 eandem inter se rationem habent, quam, si recta
 linea extrema ac media ratione secetur, habet ea
 quae potest quadrata totius & maioris portiones,
 ad eam quae potest quadrata totius & minoris
 portiones.



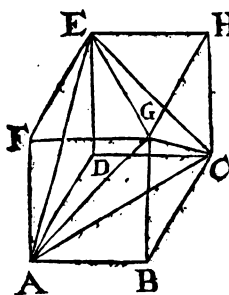
E V C L I D I S

E L E M E N T O R V M

L I B E R X V .

✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱

PROP. I. PROBL.



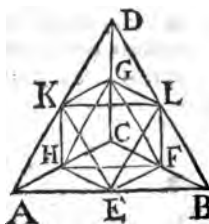
In data cubo ABCDEFGH pyramidem describere.

Ducantur diametri quadratorum GA, GE, GC, EA, EC, CA, quae omnes inter se aequales sunt. Ergo triangu-
la EGC, EAG, AGC, EAC sunt aequilate-

ra, & aequalia. Proinde EGCA tetraedrum est, cubi angulis insitens, & ergo ipsi inscriptum.
Q. E. F.

β 31. def. 11.

PROP. II. PROBL.



In data pyramide ABCD octaedrum describere.

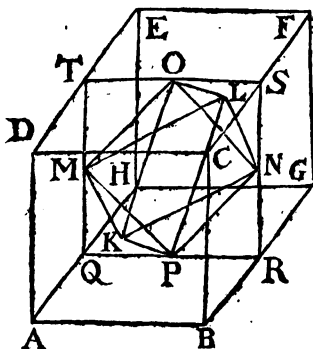
* Bisecentur latera tetraedri in punctis E, F, G, H, K, L. Haec puncta connectantur 12 rectis, quae omnes inter se
aequales erunt. Quare octo
triangu-
la, quae bases habent

rectas HG, GL, LE, EH & vertices K, F, aequilatera erunt & aequalia; & solidum sub ipsis
com-

γ 4 2

comprehensum octaedrum erit, dato tetraedro
inscriptum. Q. E. F.

PROP. III. PROBL.



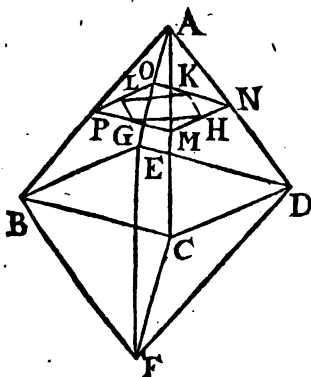
*In dato cubo AB-
CDEFG octaedrum
describere.*

Sumantur² qua- 2. 2. 4.
dratorum centra K,
L, M, N, O, P. Iun-
ctae 12 rectae ML,
LN, NP &c. con-
stituent octaedrum.
Nam per P, N, O,
M, ducantur late-

ribus quadrati AC parallelae QR, RS, ST, MQ,
quae iisdem lateribus, & ergo inter se aequa-
les erunt. (* Patet vero has rectas se mutuo
tangere; quia³ QT, ST eandem ED, & QR,
SR eandem GB, & NR, QR eandem AH &c. bi-
secant). Ergo anguli MQP, NRP⁴ sunt recti. 2. 10. 11.
Hinc quia MQ, QP, PR, NR, quippe aequa-
lium TQ, QR, RS dimidia, aequantur: erit
MP =⁵ PN. Similiter ostenditur, MP, OM, 2. 4. 5.
NK, NL & reliquas aequari. Ergo 8 trian-
gula, quorum vertices L, K, bases latera qua-
drati MONP, sunt aequilatera & aequalia, &
constituunt ergo octaedrum cubo inscriptum.
Q. E. F.

PROP.

PROP. IV. PROBL.



*In dato octaedro
ABCDEF cubum
describere.*

* Latera quatuor
triangulorum py-
ramidis BCDEA bi-
secantur in M, N,
O, P, & iungantur
MN, NO, OP, PM,
quae aequalesⁿ sunt
inter se, & paralle-
lae^s lateribus qua-

drati^t BCDE, & proinde^{*} angulos rectos in-
ter se comprehendunt. Quare MNOP est qua-
dratum. Deinde bisectis lateribus huius qua-
drati in G, H, K, L, iungantur GH, HK, KL, LG,
quaeⁿ sunt aequales, & angulos rectos^λ com-
prehendunt; quia anguli, quos cum rectis
MN, NO, OP, PM faciunt, semirecti^μ sunt.
Ergo GHKL est quadratum. Si in reliquis 5
pyramidibus octaedri eadem fiant: consti-
tuentur 5 alia quadrata ipsi GHKL aequalia,
& cum ipso cubum terminantia, dato octae-
dro inscriptum. Q. E. F.

PROP. V. PROBL.

In dato icosaedro dodecaedrum describere.

Sit ABCDEF pyramis icosaedri, cuius basis
pentagonum ABCDE. Iungantur centra cir-
culorum, in triangulis AFB &c. inscriptorum,
rectis GH, HK, KL, LM. Dico GHKLM
esse

7. 4. L.

9. 2. 6.

11. 14. 13.

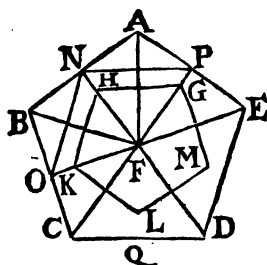
12. 10. 11.

A. 2. sch.

13. 1.

14. 4. sch.

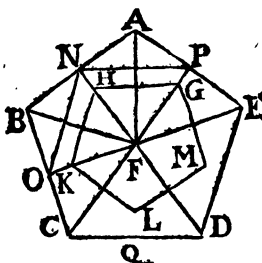
32. L.



esse pentagonum dodecaedri inscribendi. Nam rectae FG, FH, FK &c. productae bisecabunt¹ v. 4. 2. latera pentagoni in P, N, O &c. quia² bise-³ 4. 3. cant angulos ad vertices F triangulorum.

Iungantur PN, NO, quae proinde aequales erunt⁴. Iam quia⁵ FP = FN = FO, ac⁶ 26. 1. FG = FH = FK : erunt GH, HK ipsis PN, & 4. 3. NO⁷ parallelae, ac inde erit⁸ PN : GH = NF : FH = NO : HK, ideoque GH = HK. Similiter HK = KL &c. Porro quia ang. GHK⁹ = PNO, ac HKL = NOQ &c; ang. 6. 10. 11. autem PNO =¹⁰ NOQ, quia ambo sunt com- 7. 2. sch. 12. 1. plementa aequalium¹¹ angulorum in N, O ad duos rectos: erit ang. GHK = HKL &c. Denique ex puncto sublimi F in planum ABCDE ductum intelligatur perpendicularum, & a puncto, in quo plano occurrit, ductae sint rectae ad puncta P, N, O, Q, quae cum perpendiculari angulos¹² rectos facient. Illi, quae v. 4. 11. per P ducta est, parallela intelligatur alia per G, & a puncto, in quo haec ductae perpendiculari occurrit, ducantur rectae ad H, K, L, &c. Iam quia¹³ perpendicularis illa a recta per G ducta secatur in ratione FP : FG = FN : FH = FO : FK &c: patet reliquas rectas a punctis H, K, L ad perpendicularem ductas parallelas¹⁴ esse illis, quae in plano ABCDE ad eandem ductae sunt, ac ob id angulos rectos cum perpendi-

4. 5. 11.



pendiculari facere, & proinde⁹ in vno omnes plano esse. Vnde patet, GHKLM esse pentagonum aequilaterum & aequiangulum, ideoque, si in reliquis vndecim pyramidibus icosaedri eadem construxerimus, proditura esse 12 pentagona huiusmodi, quae constituent dodecaedrum icosaedro inscriptum. Q. E. F.

PROP. VI. PROBL.

Quinque figurarum latera & angulos inuenire.

1. Quia icosaedrum continetur 20 triangularis, & vnum triangulum 3 lateribus; singula vero latera bis sumuntur: numerus laterum erit dimidius facti ex 20 & 3, qui est 30. Similiter dodecaedri laterum numerus est dimidius facti ex 12 & 5, qui est 30. Et sic porro in cubo, & reliquis, inueniemus numerum laterum, sumentes dimidium facti ex numero planorum & numero laterum vnius cuiusque plani.

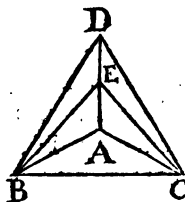
2. Numerum autem angulorum solidorum in his figuris habebimus, factum ex numero figurarum planarum & numero angulorum planorum in vnaqualibet diuidentes per numerum angulorum planorum in quolibet solido angulo. Sic in icosaedro factum ex 20 &

& 3, quod est 60 partientes per 5, habebimus
12 angulos solidos. Q. E. F.

PROP. VII. PROBL.

*Planorum, quae singulas quinque figuras
continent, inclinationem inuenire.*

1. De cubo manifestum est, eius plana ad
se inuicem recta esse.

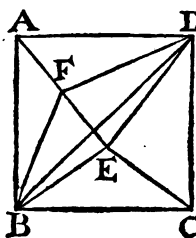


2. Sit tetraedri ABCD ex-
positum vnum triangulum
ABD, in quo a vertice B ad
latus AD ducta sit perpen-
dicularis BE. Si centris A,
D, interuallo BE describantur
duo circuli, & a puncto sectionis ad centra A,
D iungantur rectae: angulus, quem contine-
bunt, erit inclinatio planorum. Nam iunga-
tur in altero triangulo ACD recta CE. Et
quia $DE = EA$: erit CE etiam in AD per-
pendicularis. Sed quia $BCq = ABq =$
 $AEq + EBq$, & $EAq < CEq$: erit $BCq <$
 $CEq + EBq$, & ergo $\angle CEB$ acutus.
Quare CEB erit inclinatio β planorum tetrae-
dri. Hinc quum sit $CE = EB$, & $BC = AD$,
manifestum est, praedicta constructione inue-
niri angulum $\gamma = BEC =$ inclinationi plano-
rum. Q. E. F.

x. sch. 3. 3.
ψ. 47. 1.
α. 2. sch.
12. 13.
α. 13. 2.
β. 6. def. 12.

γ. 22. & 8. 1.

3. A latere octaedri describatur quadratum,
ducatur eius diameter BD, & centris B, D in-
teruallo perpendiculari, quae a vertice ad
basin



basin trianguli in octaedro ducitur, describantur duo circuli. Rectae a sectione circularum ad B, D iunctae continebunt angulum aequalem complemento inclinationis ad 2 rectos. Sit enim ABCDE pyramis octaedri,

& BF perpendicularis in Δ o ABE. Iuncta DF erit perpendicularis in AE & = ipsi BF.

3. 19. 1.

Hinc $BFq + FDq = 2 BFq^{\delta} < 2 ABq$. Sed

5. 12. 2.

$BDq = 2 ABq$. Ergo $BDq > BFq + FDq$,

3. 6. def. 11.

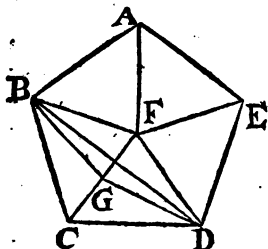
ac ob id \angle ang. DFB obtusus, Ergo BFD^{δ}

= complemento inclinationis planorum octa-

7. 22. & 8. 1.

edri ad 2 rectos. Datur \angle autem ang. BFD

dicta constructione. Q. E. F.



4. A latere icosaedri, descripto pentagono aequilatero & aequiangulo ABCDE ducatur recta BD angulum pentagoni C subtendens, & centris B, D intervallo

perpendiculari cuiusvis e triangulis icosaedri describantur duo circuli, a quorum sectione ad B, D iunctae rectae continebunt complementum inclinationis planorum ad 2 rectos,

Sit enim ABCDEF pyramis icosaedri, & BG perpendicularis vnus trianguli: erit DG perpendicularis proximi trianguli. Et quia $BG <^{\delta}$

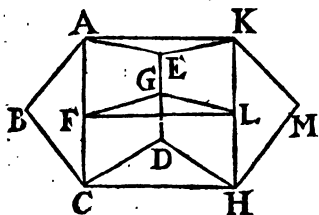
9. 19. 1.

7. 21. 1.

BC: erit \angle ang. BGD > obtuso BCD, ideoque ipse obtusus, Quare BGD complementum

in-

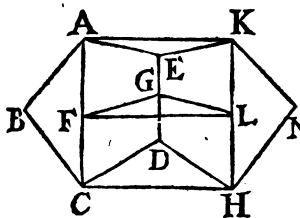
erit inclinationis planorum icosaedri. Et manifestum, est hunc angulum dari praedicta constructione. Q. E. F.



5. Exposito pentagono dodecaedri ABCDE, & iuncta recta AC, angulum pentagoni subtendente, centris A, C inter-

uallo FG rectae a puncto F bipartitae sectionis ipsius AC in latus pentagoni parallelum ED perpendicularis describantur duo circuli, & rectae a sectione ad terminos A, C ductae comprehendunt complementum inclinationis planorum dodecaedri. Nam quia* AC est latus x. 17. 13. cubi, a quo dodecaedrum describitur: ponatur ACHK esse vnum quadratorum illius cubi. Ergo erit KH recta subtendens angulum in pentagono adiacente, quod sit EKM-HD. Ex G ad ED ducatur perpendicularis GL, & iungatur FL. Et quia ED, AC sunt parallelae: erit GF in AC perpendicularis; ergo per centrum circuli pentagono ABCDE circumscripti transibit ^λ, & ED bisecabit ^μ in λ. cor. 1. 3. G. Hinc similiter GL bisecabit ipsam KH. μ. 3. 3. Quare FL = AK = AC. ν. 33. 1. Et quia perpendicularis ex G in FL cadens = $\frac{1}{2}$ AE, & $\frac{1}{2}$ FL = $\frac{1}{2}$ AC $\frac{1}{2}$ > $\frac{1}{2}$ AE: erit $\frac{1}{2}$ FL maior ξ. 8. 13. perpendiculari ex G in FL ducta, & ergo angulus, quem eacum GF continet, maior ipso GFL. Hinc quia* haec perpendicularis bisecat

4. 1.



secat ipsam FL,
erit ang. $\text{LGF} > \circ$
 $\text{GFL} + \text{GLF}$,
ideoque obtusus,
& ob id comple-
mentum inclina-
tionis pentagono-

rum dodecaedri. Sed quia ex modo dictis
est $\text{FG} = \text{GL}$, atque ostensa est $\text{FL} = \text{AC}$:
patet, dari ang. FGL per traditam constructio-
nem. Q. E. F.

F I N I S

ELEMENTORVM EVCLIDIS

